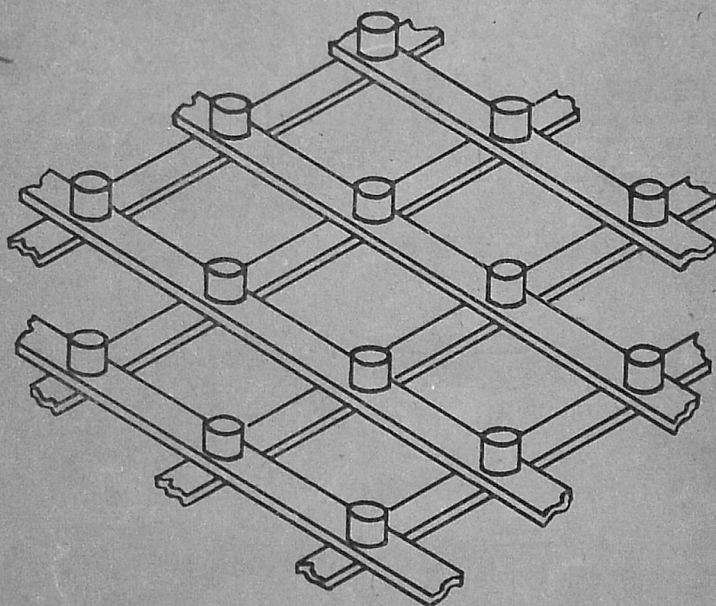


РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В КОНСТРУКЦИЯХ
ИЗ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ
И ПЛАСТИН



А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАШИНОВЕДЕНИЯ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В КОНСТРУКЦИЯХ
ИЗ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ
И ПЛАСТИН



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1974

44

30825 74-23516

Гос. публичная
научно-техническая
библиотека СССР
ЭКЗЕМПЛЯР
ЧИТАЛЬНОГО ЗАЛА

Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., Маслов В. П., Римский-Корсаков А. В. М., изд-во «Наука», 1974.

Рассматриваются задачи двух типов: распространение волн в пластинах с линейными препятствиями и колебания решетчатых структур. Изучается отражение волн от ребра жесткости и от углового соединения пластин. Исследуются свободные и вынужденные колебания периодически неоднородного стержня и двумерной стержневой решетки. Все задачи решены единым методом, являющимся обобщением метода динамических жесткостей.

Расчитана на научных и инженерно-технических работников. Илл. 34, библи. 70 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из актуальных задач акустики является создание методов расчета распространения колебательной энергии по сложным механическим конструкциям. Эта задача тесно связана с проблемой борьбы с вибрацией вообще и с вибрацией транспортных средств в особенности. Для современных судов, самолетов и т. д. характерны неуклонный рост скорости передвижения и, как следствие этого, постоянное увеличение виброактивности и шумности. Устранить или существенно уменьшить вибрации и шумы непосредственно в источниках (чаще всего машинах и механизмах) пока не представляется возможным, с ними приходится бороться на пути их распространения по прилегающим конструкциям.

Поэтому невозможно обойтись без ясного представления о явлениях, которые происходят при распространении волн, без знания основных закономерностей волнового движения и, наконец, без умения достаточно точно рассчитывать необходимые характеристики вибрационного поля той или иной инженерной конструкции.

Предлагаемая читателю книга охватывает сравнительно узкий круг вопросов, которые почти не затрагиваются в уже вышедших в свет монографиях [16, 32, 33, 38, 46, 64]. В ней исследуется распространение волн в структурах двух типов: в пластинах с линейными препятствиями и в стержневых решетках. Эти структуры являются частями практических конструкций, повсеместно применяемых в самых различных отраслях народного хозяйства.

Основное внимание в книге уделяется получению точных ре-

шений и анализу основных закономерностей волновых процессов.

Линейным препятствием на пластине называется нарушение однородности пластины вдоль прямой линии. Линейным препятствием будет, очевидно, элемент структуры, контактирующий с пластиной по прямой линии и однородный вдоль этой линии.

В книге рассматриваются пластина с высоким ребром жесткости, линейный звуковой мостик, представляющий собой две параллельные пластины, соединенные упругой полосой, а также угловое соединение пластин. При вычислении коэффициентов отражения и прохождения учитываются все типы волн в пластине — поперечные (изгибные) и волны в плоскости пластины (продольные и сдвиговые). Анализу волновых процессов в этих структурах посвящен I раздел книги.

Во II разделе исследуется распространение волн в решетчатых структурах. Под одномерной решеткой, например стержневой, подразумевается периодически неоднородный стержень, у которого неоднородности (препятствия) сосредоточены в дискретных точках. Двумерная решетка представляет собой структуру, составленную из двух или нескольких одномерных решеток (в частности, однородных элементов), которые контактируют между собой в двоякопериодической системе дискретных точек. В книге анализируется распространение нормальных волн в одномерной стержневой решетке, в двумерных решетках из однородных струн и стержней. Значительное внимание уделяется вопросам возбуждения этих решеток внешними силами. В последней главе рассмотрены две специальные конструкции двумерных стержневых решеток и приведены примеры их применения для виброизоляции машин.

Все рассматриваемые в книге задачи объединяет метод решения. Он состоит в том, что структура расчленяется на составные части и их взаимодействие заменяется силами и моментами сил реакции.

Относительно сил и моментов каждая из составных частей может быть представлена в виде некоторого многополюсника с матрицей особым образом определенных динамических жесткостей (или импедансов) вполне обозримого порядка. Условия стыковки немедленно приводят к решению задачи.

Используемый в книге метод является обобщением известного

в электротехнике, механике и акустике метода динамических жесткостей. Новизна состоит во введении понятия динамической жесткости относительно бесконечной группы сосредоточенных сил (для решетчатых конструкций) или относительно силы, гармонически распределенной по прямой линии (для задач отражения от линейных препятствий). Как оказалось, введение этих величин значительно облегчает решение уже решенных задач и позволяет решить ряд нерешенных. При этом, как увидит читатель, результаты получаются в естественной и удобной для анализа форме.

Впервые этот метод был применен авторами при решении задач о колебаниях периодически неоднородного стержня и стержневой решетки [2, 3]. В последующем он был распространен на другие конструкции, в частности на структуры с линейными препятствиями [29, 30], а также использован для расчета вынужденных колебаний решеток [4—6].

Все решения, которые приводятся в книге, ограничены двумя следующими предположениями: 1) стержни и пластины, из которых составлены рассмотренные структуры, являются тонкими; 2) площади контактных поверхностей их соединений равны нулю.

Первое предположение означает, что толщина стержней и пластин настолько мала, что выполняется гипотеза плоских сечений и для описания волновых процессов можно пользоваться простейшими уравнениями. Второе предположение эквивалентно однородности смещений и напряжений во всех точках контакта. Таким образом, везде, где нет специальных оговорок, полученные решения верны в диапазоне частот, на которых длины волн в структуре много больше толщины составных элементов (стержней и пластин) и размеров их контактных поверхностей (в случае линейного препятствия — поперечных размеров контакта).

В конце книги приведен краткий список литературы. В него вошли работы, большей частью опубликованные в журналах и сборниках и имеющие непосредственное отношение к приводимому авторами материалу. Этот список является далеко не полным, так как в него не включены работы, использующие различные инженерные методы расчета. В частности, не вошли в него многочисленные работы, в которых рассчитываются ограниченные конструкции рассматриваемого типа методом конечных элементов.

Книга основана на работах авторов [1—10, 26—31, 34]. Она может быть полезна научным и инженерно-техническим работникам, интересующимся проблемой борьбы с вибрациями и вопросами распространения волн по конструкциям.

Авторы выражают свою благодарность Л. М. Лямшеву и К. В. Фролову за то, что они внимательно прочли рукопись и сделали ряд ценных замечаний, а также сотрудникам Института машиноведения и Акустического института, которые принимали участие в обсуждении различных разделов книги.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ НА ПЛАСТИНАХ

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЖЕСТКОСТИ

Расчетом отражения и прохождения волн через линейные препятствия на пластинах занимались многие авторы [11—17, 22—24, 35—50, 62]. Метод расчета во всех этих работах сводится к следующему. Решение задачи ищется в виде комбинаций возможных прямых и отраженных волн с неизвестными амплитудами (коэффициентами). Условие непрерывности смещений и углов поворота на препятствии, а также условия равенства сил и моментов сил, действующих на обе половины рассматриваемой конструкции, с учетом сил реакции препятствия приводят к алгебраической системе линейных уравнений, где неизвестными являются амплитуды прошедших через препятствие и отраженных от него волн. Порядок системы равен удвоенному числу различных типов волн, которые могут возникнуть в рассматриваемой конструкции. Для простых структур это число невелико, и такой метод расчета быстро приводит к нужным результатам. Однако для более сложных конструкций он приводит к необходимости решать системы уравнений высокого порядка. Например, при рассмотрении отражения изгибной волны в пластине от несимметричного ребра жесткости получается система уравнений шестнадцатого порядка, а для звукового мостика (см. главу 4) порядок равен двадцати четырем. Ясно, что помимо громоздких расчетов здесь возникают трудности, связанные с анализом решений и выявлением физических закономерностей.

При расчете отдельных конструкций для снижения порядка системы уравнений часто используют упрощенные представления, справедливые в определенных диапазонах частот. На низких частотах ребро жесткости можно рассматривать как тонкий стержень, совершающий изгибные и крутильные колебания. Это понижает порядок системы в 2 раза [67]. Также в 2 раза понижается порядок, если рассматривать случай нормального падения волны на препятствие [12].

Иногда не учитывают влияния некоторых типов волн, возникающих в соединениях. Это обращает в нуль некоторые члены

в уравнениях и облегчает решение системы. В других случаях накладывают ограничения на конструкцию. Так, при рассмотрении углового соединения пластин часто считают, что пластины абсолютно жесткие в продольном направлении. Это снижает порядок определителей в решении с восьми до четырех.

Наиболее удобен метод динамических жесткостей. В общем случае он позволяет снизить порядок системы уравнений в 2 раза, а в тех случаях, когда конструкция имеет плоскость симметрии, — в 4 раза. Кроме того, введение понятия линейной динамической жесткости дает возможность представить результаты в удобной для анализа форме.

Рассмотрим бесконечную двумерную среду, которая описывается линейным дифференциальным уравнением $L[w(x, y)] = 0$, где w — смещение, L — дифференциальный оператор. Решениями этого уравнения являются функции вида $\exp[i(kr - \omega t)]$, где k — волновой вектор с координатами k_x и k_y , r — вектор с координатами x и y . Эти решения представляют собой плоские гармонические или экспоненциально затухающие волны, которые могут свободно существовать в рассматриваемой среде. К среде по линии $x = 0$ жестко присоединено одномерное препятствие $l[u(y)] = 0$. Вообще говоря, препятствие может быть двумерным, но чтобы не загромождать основную идею метода, предположим, что оно одномерно.

Пусть из левой половины среды ($x < 0$) на препятствие под углом θ к оси x падает плоская монохроматическая волна

$$w_{\text{п}}(x, y) = w_{\text{п}} \exp[i(kr - \omega t)],$$

где $w_{\text{п}}$ — постоянная амплитуда падающей волны. В результате взаимодействия среды с препятствием слева и справа от препятствия в среде возникнут возмущения. Обозначим через $w_1(x, y)$ движение среды, вызванное отраженными волнами ($x < 0$), через $w_2(x, y)$ — движение среды справа от препятствия ($x > 0$) без учета падающей волны, т. е. учитывающее только возмущение среды. Очевидно, что $w_1(0, y) = w_2(0, y)$. Смещение препятствия обозначим через $u(y)$.

Между средой и препятствием действуют силы и моменты сил реакции. Для простоты будем считать, что имеются только силы реакции: $f_c(y)$ действует на среду и $f_{\text{п}}(y)$ действует на препятствие. Поскольку эти силы внутренние, то их сумма вдоль линии $x = 0$

$$f_{\text{п}}(y) + f_c(y) = 0. \quad (1.1)$$

Все величины, описывающие движение рассматриваемой конструкции (смещения, силы реакции), имеют множитель $\exp[i(k_y y - \omega t)]$. Множитель $\exp(-i\omega t)$ — результат того, что движение установившееся, а множитель $\exp(ik_y y)$ есть следствие однородности конструкции в направлении оси Oy . Поэтому смещения имеют вид $u(y) = u_0 \exp[i(k_y y - \omega t)]$, $w_1(0, y) = w_2(0, y) =$

$= w_0 \exp [i (k_y y - \omega t)]$, где u_0 и w_0 — постоянные амплитуды; силы реакции имеют ту же форму $f_{c, n}(y) = f_{c, n} \exp [i (k_y y - \omega t)]$, где f_c и f_n тоже постоянные.

Рассмотрим теперь движение среды и препятствия под действием сил реакции. С этой целью нужно решить уравнения

$$Lw = f_c \exp (ik_y y) \delta (x) \quad \text{и} \quad Lu = f_n \exp (ik_y y). \quad (1.2)$$

Их решение можно представить в виде $u_0 = J_n f_n$, а амплитуду смещения по линии $x = 0$ возмущенной (силой реакции) среды в виде $w_0 = J_c f_c$ или в форме

$$f_c = C_c w_0 \quad \text{и} \quad f_n = C_n u_0. \quad (1.3)$$

Эти формулы устанавливают связь между силой реакции, действующей на препятствие, и его смещением, а также между силой реакции, действующей на среду, и смещением возмущенной среды (без учета падающей волны).

Смещение препятствия должно, очевидно, равняться полному смещению среды при $x = 0$:

$$u_0 = w_n + w_0. \quad (1.4)$$

Подставляя соотношения (1.3) и (1.4) в равенство (1.1), получим уравнение

$$(w_n + w_0) C_n + w_0 C_c = 0, \quad (1.5)$$

устанавливающее зависимость между амплитудами падающей волны и возмущения, обусловленного линейным препятствием. Из уравнения (1.5) легко найти амплитуду возмущения

$$w_0 = -C_n w_n / (C_c + C_n).$$

Если в среде может существовать только одна нормальная волна, то отношение w_0/w_n есть коэффициент отражения

$$R = w_0/w_n = -C_n / (C_c + C_n). \quad (1.6)$$

Аналогично вычисляется в этом случае и коэффициент прохождения, равный отношению суммы амплитуд возмущения и падающей волны к амплитуде падающей волны. Он равен

$$T = (w_0 + w_n)/w_n = 1 + R = C_c / (C_c + C_n). \quad (1.7)$$

В общем случае возмущения $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ складываются из нормальных волн различных типов, которые могут существовать в среде, и величина w_0 есть сумма амплитуд этих волн. Отношение w_0/w_n тогда равно сумме коэффициентов отражения всех нормальных волн, а отношение (1.7) — сумме коэффициентов прохождения. Коэффициенты прохождения и отражения для каждой волны отдельно легко вычисляются на основе решения первого уравнения (1.2). Примеры таких вычислений будут даны в главах 3 и 4.

Величины C_c и C_n , входящие в выражения для коэффициентов отражения и прохождения, являются отношениями линейной плотности синусоидально распределенной силы к смещению. Такие величины мы будем в дальнейшем называть линейными динамическими жесткостями, а их обратные величины J_c и J_n — линейными динамическими податливостями. Слово «динамический» часто будет опускаться, так как все рассматриваемые ниже задачи динамические. Понятие линейной динамической жесткости отличается от обычного понятия динамической жесткости. Динамическая жесткость определяется как отношение сосредоточенной в точке силы к смещению и имеет размерность *дина/см*. Линейная динамическая жесткость есть отношение линейной плотности силы, распределенной по гармоническому закону, к смещению, и имеет размерность *дина/см²*. Она не зависит от координаты точки вдоль линии. Аналогичным понятием пользуются в теории слонстых сред для описания реакции среды на падающую плоскую волну [13]. Плоская граница трехмерной среды здесь характеризуется импедансом, являющимся отношением поверхностной плотности силы, распределенной гармонически по плоскости, к скорости смещения точек плоскости. Такой импеданс по аналогии с только что введенным определением можно назвать поверхностным импедансом. Если вместо скорости точек плоскости взять их смещения, то эта величина будет поверхностной динамической жесткостью с размерностью *дина/см³*.

В качестве примера рассмотрим задачу отражения плоской волны в однородной мембране от жестко скрепленной с ней по линии $x = 0$ струны. Пусть $L = T_1 (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) + \rho_1 \omega^2$ и $l = T_2 d^2/dy^2 + \rho_2 \omega^2$ — линейные дифференциальные операторы, описывающие движение мембраны и струны, где T_1 и T_2 , ρ_1 и ρ_2 — их натяжения и удельные плотности соответственно. В этой задаче средой является мембрана и препятствием — струна.

Поскольку в мембране существует лишь одна нормальная волна, коэффициенты отражения и прохождения вычисляются непосредственно по формулам (1.6) и (1.7). Для вычисления динамических жесткостей мембраны и струны необходимо решить уравнения (1.2).

Для второго уравнения решение элементарно: оно ищется в виде $u_0 \exp(ik_y y)$ и после подстановки его в уравнение определяются смещение

$$u(y) = u_0 \exp(ik_y y) = f_n \exp(ik_y y)/T_2 (k_2^2 - k_y^2)$$

и линейная динамическая жесткость препятствия (струны)

$$C_n = f_n(y)/u(y) = T_2 (k_2^2 - k_y^2), \quad (1.8)$$

где $k_2 = \omega (\rho_2/T_2)^{1/2}$ — волновое число струны.

Решение первого уравнения (1.2) ищется обычным способом в виде интеграла Фурье по координате x :

$$w(x, y) = w_0 \exp(ik_y y) \int_{-\infty}^{\infty} w^*(s) \exp(isx) ds.$$

Подстановка его в уравнение и замена δ -функции аналогичным интегралом приводят к замкнутому решению

$$w(x, y) = f_c \exp(ik_y y) \frac{1}{2\pi T_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) ds / [(k_1^2 - k_y^2) - s^2]$$

или после взятия интеграла вычетами

$$w(x, y) = -if_c (2T_1)^{-1} (k_1^2 - k_y^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[i(k_1^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}} |x| + ik_y y],$$

где $k_1 = \omega (\rho_1/T_1)^{1/2}$ — волновое число мембраны. Отсюда находится линейная динамическая жесткость мембраны

$$C_c = f_c \exp(ik_y y) / w(0, y) = 2iT_1 (k_1^2 - k_y^2)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Линейная жесткость струны (1.8) — величина действительная. Относительно синусоидально распределенной силы струна ведет себя как масса при $k_2 < k_y$ и как пружина при $k_2 > k_y$. Для мембраны линейная жесткость C_c [см. (1.9)] — величина чисто мнимая при $k_1 > k_y$. В этом случае вся энергия уносится на бесконечность двумя расходящимися от линии $x = 0$ волнами $\exp[i(k_1^2 - k_y^2)^{1/2} |x| + ik_y y]$. Если же $k_1 < k_y$, линейная жесткость мембраны такая же, как у чистой массы. Вся энергия колебаний сосредоточена вблизи линии возбуждения, и амплитуда движения убывает в направлении оси Ox , как $\exp[-(k_y^2 - k_1^2)^{1/2} |x|]$.

Коэффициент отражения R получается после подстановки линейных жесткостей (1.8) и (1.9) в выражение (1.6). Прделав простые арифметические преобразования и выразив проекцию волнового числа на ось Oy через угол θ падения волны $k_y = k_1 \sin \theta$, получаем окончательное выражение

$$R = - \left[1 + 2i \left(\frac{T_1 k_1}{T_2 k_2^2} \right) \frac{\cos \theta}{1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2 \theta} \right]^{-1}.$$

Отсюда видно, что модуль $|R|$ всегда меньше единицы, за исключением случая $\theta = \pm \pi/2$, когда волна распространяется вдоль оси Oy .

Если струна жестче мембраны ($k_1 > k_2$), то всегда найдется такой угол θ_0 , при котором $k_2 = k_1 \sin \theta_0$ и коэффициент отражения равен нулю.

В этом случае след падающей волны совпадает с волной однородной струны (явление совпадения), падающая волна не испытывает никакого сопротивления со стороны струны и имеет место полное прохождение.

ВИБРОАКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В предыдущей главе было показано, что коэффициенты отражения и прохождения волн выражаются через линейные динамические жесткости отдельных элементов конструкций. Вычисление линейных жесткостей представляет собой самостоятельную задачу. Поэтому прежде чем переходить к рассмотрению конкретных задач отражения (главы 3 и 4), удобно проделать вычисления отдельно для всех основных элементов рассматриваемых конструкций и в последующем пользоваться уже готовыми формулами. Этому и посвящена глава 2.

Ниже будут вычислены линейные податливости безграничной и полубезграничной пластин, бесконечной упругой полосы и несимметричного ребра жесткости. Все эти элементы представляют собой неограниченные или ограниченные упругие пластины. Толщина пластин h предполагается настолько малой, что для изгибных колебаний верно уравнение [25]

$$\Delta^2 u_z - k^4 u_z = 0,$$

где u_z — поперечные смещения; $k = \omega^{1/2} (\rho h/D)^{1/4}$ — волновое число изгибных колебаний; ρ — плотность материала; $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ω — круговая частота; Δ — оператор Лапласа.

Условия малости толщины h выражаются двумя неравенствами [37]: $(\omega h/2C_l)^2 \ll 1$ и $(kh/2)^2 \ll 1$, где C_l — скорость распространения поперечных волн в материале.

Кроме изгибных колебаний в пластинах могут возбуждаться продольные и поперечные волны, векторы смещений которых будем предполагать лежащими в плоскости пластин. Это ограничение является также следствием малости толщины h [21]. Плоские продольные и поперечные волны в тонкой пластине распространяются независимо и описываются волновыми уравнениями

$$\partial^2 u_x / \partial x^2 + k_l^2 u_x = 0 \quad \text{и} \quad \partial^2 u_y / \partial x^2 + k_l^2 u_y = 0,$$

где x и y — ортогональные координаты; $k_l = \omega [\rho(1 - \nu^2)/E]^{1/2}$; $k_t = \omega [2\rho(1 + \nu)/E]^{1/2}$. Волны распространяются вдоль оси x .

Выпишем формулы для компонент сил и моментов сил в пластине, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} F_z &= \pm D [\partial^3 u_z / \partial x^3 + (2 - \nu) \partial^3 u_z / \partial y^2 \partial x] \Big|_{x=\mp l}, \\ M &= \pm D [\partial^2 u_z / \partial x^2 + \nu \partial^2 u_z / \partial y^2] \Big|_{x=\mp l}, \\ F_x &= \mp \sigma_{xx} h \Big|_{x=\mp l}, \quad F_y = \mp \sigma_{xy} h \Big|_{x=\mp l}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, выражающиеся через смещения следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (u_{xx} + \nu u_{yy}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} u_{xy}, \quad (2.2)$$

где $u_{ik} = 1/2 (\partial u_i / \partial u_k + \partial u_k / \partial u_i)$ — компоненты тензора деформаций. Если пластина разрезана по линии $x = l$, то верхний знак в формулах (2.1) относится к силам и моментам сил, действующим на правую часть пластины ($x > l$), нижний знак относится к левой части ($x < l$).

Бесконечная полоса

Рассмотрим вынужденные колебания полосы под действием синусоидальных сил, приложенных вдоль краев. Поле смещений изгибных волн имеет вид

$$u_z(x) = A_1 \exp(ikx) + A_2 \exp(-ikx) + A_3 \exp(-\kappa'x) + A_4 \exp(\kappa'x), \quad (2.3)$$

где $\kappa = (k^2 - k_y^2)^{1/2}$, $\kappa' = (k^2 + k_y^2)^{1/2}$ — компоненты волновых векторов однородной и неоднородной волн соответственно. Поле смещений продольных и поперечных волн имеет вид

$$u(x) = A_1' n_1' \exp(ik_1 x) + A_1'' n_1'' \exp(-ik_1 x) + A_1' (a \times n_1') \exp(ik_1 x) + A_1'' (a \times n_1'') \exp(-ik_1 x), \quad (2.4)$$

где

$$n_1' = \cos \theta_1 i + \sin \theta_1 j, \quad n_1'' = -\cos \theta_1 i + \sin \theta_1 j, \\ n_1' = \cos \theta_1 i + \sin \theta_1 j, \quad n_1'' = -\cos \theta_1 i + \sin \theta_1 j$$

— единичные векторы для направлений распространения продольных и поперечных волн; $a = k, (i, j, k)$ — орты; θ_1 — угол между волновым вектором продольной волны и осью x ; θ_1 — угол между волновым вектором поперечной волны и осью x ; $\kappa_1 = (k_1^2 - k_y^2)^{1/2}$, $\kappa_1 = (k_1^2 + k_y^2)^{1/2}$ — компоненты волновых векторов продольной и поперечной волн соответственно.

Полоса имеет плоскость симметрии $x = 0$, и поле смещений и сил можно разделить на две линейно независимые части — симметричную и антисимметричную, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_z(x) = \pm u_z(-x), \quad u_y(x) = \pm u_y(-x), \quad u_x(x) = \mp u_x(-x), \\ \alpha(x) = \mp \alpha(-x), \quad F_z(l) = \pm F_z(-l), \quad F_y(l) = \pm F_y(-l), \\ F_x(l) = \mp F_x(-l), \quad M(l) = \mp M(-l), \quad (2.5)$$

где $\alpha(x) = \partial u_z(x) / \partial x$; \pm — верхний знак относится к симметричным колебаниям, нижний — к антисимметричным. Сопоставляя выражения (2.3) — (2.5), находим поле смещений для симмет-

ричной и антисимметричной форм колебаний, обозначаемых индексами «с» и «а» соответственно. Для симметричной формы колебаний поле смещений имеет вид

$$\begin{aligned} u_z^c(x) &= A_1^c \cos \kappa x + A_2^c \operatorname{ch} \kappa' x, \\ \alpha^c(x) &= -A_1^c \kappa \sin \kappa x + A_2^c \kappa' \operatorname{sh} \kappa' x, \\ u_y^c(x) &= A_l^c \sin \theta_l \cos \kappa_l x + A_l^c \cos \theta_l \cos \kappa_l x, \\ u_x^c(x) &= A_l^c i \cos \theta_l \sin \kappa_l x - A_l^c i \sin \theta_l \sin \kappa_l x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поле смещений для антисимметричной формы колебаний:

$$\begin{aligned} u_z^a(x) &= A_1^a i \sin \kappa x - A_2^a \operatorname{sh} \kappa' x, \\ \alpha^a(x) &= A_1^a i \kappa \cos \kappa x - A_2^a \kappa' \operatorname{ch} \kappa' x, \\ u_y^a(x) &= A_l^a \cos \theta_l \cos \kappa_l x - A_l^a \sin \theta_l \cos \kappa_l x, \\ u_x^a(x) &= A_l^a i \sin \theta_l \sin \kappa_l x + A_l^a i \cos \theta_l \sin \kappa_l x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\sin \theta_l = k_y/k_l$, $\cos \theta_l = \kappa_l/k_l$, $\sin \theta_l = k_y/k_l$, $\cos \theta_l = \kappa_l/k_l$.

Введем следующие обозначения: $C_{mm} = F_m(l)/u_m(l) = F_m(-l)/u_m(-l)$, $C_{mn} = F_m(l)/u_n(l) = -C_{mn}(-l) = -F_m(-l)/u_n(-l)$, при условии $u_m(l) = u_m(-l) = 0$, если $m \neq n$. Здесь C_{mn} — жесткости полосы для синусоидальных гармонических сил, приложенных к краям (линейные жесткости). Поскольку приведенное выше определение имеет смысл только для симметричных и антисимметричных колебаний в отдельности, то назовем C_{mn}^a , C_{mn}^c линейными жесткостями полосы для антисимметричных и симметричных сил соответственно. Так как предполагается, что изгибные, с одной стороны, и продольные и поперечные колебания — с другой, не связаны между собой; то $C_{mn} = 0$, если $m = x$ или y и $n = z$ или a .

Аналогичным образом определяются линейные податливости полосы для симметричных и антисимметричных колебаний:

$$\begin{aligned} J_m^{a,c} &= u_m^{a,c}(l)/F_m^{a,c}(l) = -J_m^{a,c}(-l) = -u_m^{a,c}(-l)/F_m^{a,c}(-l), \\ J_{mn}^{a,c} &= u_m^{a,c}(l)/F_n^{a,c}(l) = u_m^{a,c}(-l)/F_n^{a,c}(-l) \end{aligned}$$

при условии $F_m^{a,c}(l) = F_m^{a,c}(-l) = 0$, если $m \neq n$.

Таким образом, определено восемь матриц второго порядка, у которых все элементы, вообще говоря, не равны нулю. Поскольку полоса, как элемент некоторой конструкции, может быть произвольно расположена относительно соответствующей системы координат, то линейным жесткостям и податливостям ниже присвоены индексы: t и a — для изгибных колебаний, n и l — для продольных и поперечных

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} F_z^{c,a}(\pm l) \\ M^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} C_{it}^{c,a} & \mp C_{ia}^{c,a} \\ \mp C_{at}^{c,a} & C_{aa}^{c,a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_z^{c,a}(\pm l) \\ \alpha^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix}, \\
 \begin{vmatrix} u_z^{c,a}(\pm l) \\ \alpha^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} J_{it}^{c,a} & \mp J_{ia}^{c,a} \\ \mp J_{at}^{c,a} & J_{aa}^{c,a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_z^{c,a}(\pm l) \\ M^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix}, \\
 \begin{vmatrix} F_x^{c,a}(\pm l) \\ F_y^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} C_{nn}^{c,a} & \mp C_{nl}^{c,a} \\ \mp C_{ln}^{c,a} & C_{ll}^{c,a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x^{c,a}(\pm l) \\ u_y^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix}, \\
 \begin{vmatrix} u_x^{c,a}(\pm l) \\ u_y^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} J_{nn}^{c,a} & \mp J_{nl}^{c,a} \\ \mp J_{ln}^{c,a} & J_{ll}^{c,a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_x^{c,a}(\pm l) \\ F_y^{c,a}(\pm l) \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Каждое из написанных здесь равенств представляет собой два независимых: одно для симметричных колебаний (индекс «с»), другое для антисимметричных (индекс «а»).

Подставляя теперь выражения для поля смещений (2.6) и (2.7) в уравнения для сил реакции, действующих на краях полосы (2.1) и (2.2), и используя условия симметрии (2.5) и введенные определения податливостей и жесткостей (2.8), получим приведенные ниже выражения элементов матриц.

1. Симметричные изгибные колебания полосы

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} C_{it}^c & C_{ia}^c \\ C_{at}^c & C_{aa}^c \end{vmatrix} &= (1/\Delta_c^c) \begin{vmatrix} -\Delta_1^c & \Delta_2^c \\ \Delta_2^c & \Delta_3^c \end{vmatrix}, \\
 \begin{vmatrix} J_{it}^c & J_{ia}^c \\ J_{at}^c & J_{aa}^c \end{vmatrix} &= (1/\Delta_j^c) \begin{vmatrix} -\Delta_3^c & \Delta_2^c \\ \Delta_2^c & \Delta_1^c \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_c^c &= (1/D) (\kappa \operatorname{tg} \kappa l + \kappa' \operatorname{th} \kappa' l), \\
 \Delta_j^c &= D [\kappa \operatorname{tg} \kappa l (\kappa'^2 - \nu k_y^2)^2 + \kappa' \operatorname{th} \kappa' l (\kappa^2 + \nu k_y^2)^2], \\
 \Delta_1^c &= 2k^2 \kappa \kappa' \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l, \\
 \Delta_2^c &= \kappa' \operatorname{th} \kappa' l (\kappa^2 + \nu k_y^2) - \kappa \operatorname{tg} \kappa l (\kappa'^2 - \nu k_y^2), \\
 \Delta_3^c &= 2k^2.
 \end{aligned}$$

Элементы матриц жесткостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_c^c = 0$, являющемся дисперсионным уравнением симметричных нормальных волн в зажатой полосе [18]. Элементы матрицы податливостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_j^c = 0$, являющемся дисперсионным уравнением симметричных нормальных волн в свободной полосе [18].

2. Антисимметричные изгибные колебания полосы

$$\begin{vmatrix} C_{it}^a & C_{ia}^a \\ C_{at}^a & C_{aa}^a \end{vmatrix} = (1/\Delta_c^a) \begin{vmatrix} -\Delta_1^a & \Delta_2^a \\ \Delta_2^a & -\Delta_3^a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} J_{ll}^a & J_{l\alpha}^a \\ J_{\alpha l}^a & J_{\alpha\alpha}^a \end{vmatrix} = (1/\Delta_J^a) \begin{vmatrix} \Delta_3^a & \Delta_2^a \\ \Delta_2^a & \Delta_1^a \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_c^a &= (1/D) (\kappa \operatorname{th} \kappa' l - \kappa' \operatorname{tg} \kappa l), \\ \Delta_J^a &= D [\kappa \operatorname{th} \kappa' l (\kappa'^2 - \nu k_{ij}^2) - \kappa' \operatorname{tg} \kappa l (\kappa^2 + \nu k_{ij}^2)], \\ \Delta_1^a &= 2k^2 \kappa \kappa', \\ \Delta_2^a &= -\kappa' \operatorname{tg} \kappa l (\kappa^2 + \nu k_{ij}^2) - \kappa \operatorname{th} \kappa' l (\kappa'^2 - \nu k_{ij}^2), \\ \Delta_3^a &= 2k^2 \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l. \end{aligned}$$

Элементы матрицы жесткостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_c^a = 0$, являющемся дисперсионным уравнением антисимметричных нормальных волн в зажатой полосе. Элементы матрицы податливостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_J^a = 0$, являющемся дисперсионным уравнением антисимметричных нормальных волн в свободной полосе [18].

3. Симметричные продольно-поперечные колебания полосы

$$\begin{vmatrix} C_{nn}^c & C_{nl}^c \\ C_{ln}^c & C_{ll}^c \end{vmatrix} = (1/\Delta_Z^c) \begin{vmatrix} \Delta_4^c & \Delta_5^c \\ -\Delta_5^c & -\Delta_6^c \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} J_{nn}^c & J_{nl}^c \\ J_{ln}^c & J_{ll}^c \end{vmatrix} = (1/\Delta_Y^c) \begin{vmatrix} \Delta_6^c & \Delta_5^c \\ -\Delta_5^c & -\Delta_4^c \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_z^c &= (1/\omega^2 \rho h) (\kappa_l \kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l + k_y^2 \operatorname{tg} \kappa_l l), \\ \Delta_Y^c &= \omega^2 \rho h [4k_{ij}^2 \kappa_l \kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l + (\kappa_l^2 - k_y^2)^2 \operatorname{tg} \kappa_l l] / k_l^4, \\ \Delta_4^c &= \kappa_l, \\ \Delta_5^c &= ik_y [2\kappa_l \kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l - (\kappa_l^2 - k_y^2) \operatorname{tg} \kappa_l l] / k_l^2, \\ \Delta_6^c &= \kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l \operatorname{tg} \kappa_l l. \end{aligned}$$

Элементы матрицы податливостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_Y^c = 0$, являющемся дисперсионным уравнением симметричных нормальных волн для свободной полосы — дисперсионным уравнением Рэля — Лэмба [32].

4. Антисимметричные продольно-поперечные колебания полосы

$$\begin{vmatrix} C_{nn}^a & C_{nl}^a \\ C_{ln}^a & C_{ll}^a \end{vmatrix} = (1/\Delta_z^a) \begin{vmatrix} -\Delta_4^a & \Delta_5^a \\ -\Delta_5^a & \Delta_6^a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} J_{nn}^a & J_{nl}^a \\ J_{ln}^a & J_{ll}^a \end{vmatrix} = (1/\Delta_Y^a) \begin{vmatrix} -\Delta_6^a & \Delta_5^a \\ -\Delta_5^a & \Delta_4^a \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta_z^a = (\kappa_l \kappa_t \operatorname{tg} \kappa_l l + k_y^2 \operatorname{tg} \kappa_l l) / \omega^2 \rho h,$$

$$\Delta_Y^a = \omega^2 \rho h [4k_y^2 \kappa_l \kappa_t \operatorname{tg} \kappa_l l + (\kappa_t^2 - k_y^2)^2 \operatorname{tg} \kappa_l l] / k_t^4,$$

$$\Delta_n^a = \kappa_t \operatorname{tg} \kappa_l l \operatorname{tg} \kappa_l l,$$

$$\Delta_5^a = ik_y k_t^{-2} [2\kappa_l \kappa_t \operatorname{tg} \kappa_l l - (\kappa_t^2 - k_y^2)] \operatorname{tg} \kappa_l l, \quad \Delta_6^a = \kappa_t.$$

Элементы матрицы податливостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_Y^a = 0$, являющемся дисперсионным уравнением антисимметричных продольно-поперечных нормальных волн в свободной полосе — уравнением Рэлея — Лэмба [32].

Полубезграничная пластина

Матрицы линейных податливостей и жесткостей полубезграничной пластины можно получить из матриц полосы, введя небольшое затухание в материал пластины и устремив l к бесконечности. При этом $\operatorname{tg} \kappa l \rightarrow i$, $\operatorname{tg} \kappa_l l \rightarrow i$, $\operatorname{tg} \kappa_t l \rightarrow i$, $\operatorname{th} \kappa' l \rightarrow 1$. Матрицы для симметричных и антисимметричных колебаний становятся тождественными.

Матрицы для изгибных колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} C_{tt} & C_{ta} \\ C_{at} & C_{aa} \end{vmatrix} &= (1/\Delta_c) \begin{vmatrix} -\Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} J_{tt} & J_{ta} \\ J_{at} & J_{aa} \end{vmatrix} &= (1/\Delta_J) \begin{vmatrix} -\Delta_3 & \Delta_2 \\ \Delta_2 & \Delta_1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\Delta_c = (i\kappa + \kappa')/D,$$

$$\Delta_J = D [i\kappa (\kappa'^2 - \nu k_y^2)^2 + \kappa' (\kappa^2 + \nu k_y^2)^2],$$

$$\Delta_1 = 2ik^2 \kappa \kappa',$$

$$\Delta_2 = \kappa' (\kappa^2 + \nu k_y^2) - i\kappa (\kappa'^2 - \nu k_y^2),$$

$$\Delta_3 = 2k^2.$$

Элементы матрицы податливостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_J = 0$, являющемся дисперсионным уравнением изгибной волны «рэлеевского» типа [19].

Матрицы линейных жесткостей и податливостей полубезграничной пластины для продольных и поперечных колебаний имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} C_{nn} & C_{nl} \\ C_{ln} & C_{ll} \end{vmatrix} &= (1/\Delta_z) \begin{vmatrix} -\Delta_4 & \Delta_5 \\ -\Delta_5 & \Delta_6 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} J_{nn} & J_{nl} \\ J_{ln} & J_{ll} \end{vmatrix} &= (1/\Delta_Y) \begin{vmatrix} -\Delta_6 & \Delta_5 \\ -\Delta_5 & \Delta_4 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_z &= (\kappa_l \kappa_t + k_y^2) / \omega^2 \rho h, \\ \Delta_Y &= \omega^2 \rho h [4k_y^2 \kappa_l \kappa_t + (\kappa_t^2 - k_y^2)^2] / k_t^4, \\ \Delta_4 &= i \kappa_t, \\ \Delta_5 &= i k_y [2\kappa_l \kappa_t - (\kappa_t^2 - k_y^2)] / k_t^2, \\ \Delta_6 &= -i \kappa_t.\end{aligned}$$

Элементы матрицы податливостей обращаются в бесконечность при условии $\Delta_Y = 0$, являющемся дисперсионным уравнением «рэлеевской» волны в полубезграничной пластине [32].

Безграничная пластина

Чтобы получить матрицы безграничной пластины, нужно «сшить» две полубезграничные пластины условиями

$$\begin{aligned}u^I(-0) = u^{II}(+0) = u, \quad \alpha^I(-0) = \alpha^{II}(+0) = \alpha, \\ F^I + F^{II} = F, \quad M^I + M^{II} = M,\end{aligned}$$

где индекс I относится к левой полубезграничной пластине, а индекс II — к правой. Тогда

$$F_z = C_t u_z, \quad M = C_\alpha \alpha, \quad F_x = C_n u_x, \quad F_y = C_l u_y,$$

где

$$\begin{aligned}C_t = 2C_{tt} = -4k^2 D / (1/i\kappa' + 1/i\kappa), \quad C_\alpha = 2C_{\alpha\alpha} = 4k^2 D / (i\kappa + \kappa'), \\ C_n = 2C_{nn} = 2\omega^2 \rho h / (i\kappa_l \pm ik_y^2/\kappa_l), \quad C_l = 2C_{ll} = 2\omega^2 \rho h / (i\kappa_t + ik_y^2/\kappa_t).\end{aligned}$$

Все перекрестные члены обращаются в нуль. Поэтому податливости будут обратны соответствующим жесткостям:

$$J_l = 1/C_l, \quad J_\alpha = 1/C_\alpha, \quad J_n = 1/C_n, \quad J_t = 1/C_t.$$

Все податливости образуются суммой двух слагаемых. Каждое слагаемое характеризует податливость для определенного типа волны. Обозначим:

$$J_{tn} = -\beta/\kappa', \quad J_{t0} = -\beta/i\kappa, \quad J_{\alpha n} = \beta\kappa', \quad J_{\alpha 0} = \beta i\kappa,$$

где $\beta = 1/4 k^2 D$; J_{t0} , $J_{\alpha 0}$ — податливости для однородных волн; J_{tn} , $J_{\alpha n}$ — податливости для неоднородных волн. Далее обозначим $J_{nd} = \gamma \kappa_d / k_y$, $J_{nt} = \gamma k_y / \kappa_t$, $J_{ld} = \gamma k_y / \kappa_l$, $J_{lt} = \gamma \kappa_t / k_y$, где индекс d относится к волне расширения, а индекс t — к волне сдвига $\gamma = ik_y / 2\omega^2 \rho h$.

Поле смещений при действии силы и момента в безграничной пластине имеет вид

$$\begin{aligned}u_z(x) = F_z [J_{t0} \exp(i\kappa |x - x_0|) + J_{tn} \exp(-\kappa' |x - x_0|)] + \\ + M\beta [(x - x_0) / |x - x_0|] [\exp(i\kappa |x - x_0|) - \exp(-\kappa' |x - x_0|)],\end{aligned}$$

$$\alpha(x) = -F_z \beta \operatorname{sign}(x - x_0) [\exp(i\kappa|x - x_0|) - \exp(-\kappa'|x - x_0|)] + \\ + M [J_{\alpha 0} \exp(i\kappa|x - x_0|) + J_{\alpha 11} \exp(-\kappa'|x - x_0|)].$$

Поле смещений в безграничной пластине под действием сил F_x, F_y имеет следующий вид:

$$u_x(x) = F_x [J_{nd} \exp(i\kappa_l|x - x_0|) + J_{nl} \exp(i\kappa_l|x - x_0|)] + \\ + F_y \gamma \operatorname{sign}(x - x_0) [\exp(i\kappa_l|x - x_0|) - \exp(i\kappa_l|x - x_0|)], \\ u_y(x) = F_x \gamma \operatorname{sign}(x - x_0) [\exp(i\kappa_l|x - x_0|) - \exp(i\kappa_l|x - x_0|)] + \\ + F_y [J_{ld} \exp(i\kappa_l|x - x_0|) + J_{ll} \exp(i\kappa_l|x - x_0|)]. \quad (2.11)$$

Эти выражения удобны при вычислении коэффициента отражения и будут использованы в главе 3.

Несимметричное ребро жесткости

Несимметричное ребро жесткости представляет собой полосу, на которую действуют силы только вдоль одного из краев ($x = -l$). Условия на свободном краю имеют вид

$$F^c(l) + F^a(l) = 0, \quad M^c(l) + M^a(l) = 0,$$

отсюда

$$F^c(-l) = F^a(-l) = F(-l)/2, \quad M^c(-l) = M^a(-l) = M(-l)/2.$$

Обозначим элементы матрицы податливостей ребра индексом «р». Тогда можно написать

$$\begin{vmatrix} u_z(-l) \\ \alpha(-l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{tl}^p & J_{\alpha\alpha}^p \\ J_{\alpha t}^p & J_{\alpha\alpha}^p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_z(-l) \\ M(-l) \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} u_x(-l) \\ u_y(-l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{nn}^p & J_{nl}^p \\ J_{ln}^p & J_{ll}^p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_x(-l) \\ F_y(-l) \end{vmatrix}, \quad (2.12)$$

где $J_{ik}^p = 1/2 (J_{ik}^c + J_{ik}^a)$.

Рассмотрим предельный случай низкочастотного длинноволнового воздействия. Для продольно-поперечных колебаний элементы матрицы податливостей выражают связь между изгибными и продольными колебаниями ребра как стержня:

$$J_{nn}^p = \frac{1}{2} \left(-\frac{\kappa_l^2 l^2}{\Delta_{np}} + \frac{1}{\Delta_{изг}} \right), \\ J_{ll}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta_{np}} - \frac{\kappa_l^2 l^2}{\Delta_{изг}} \right), \\ J_{nl}^p = -J_{ln}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{ik_y l v}{\Delta_{np}} - \frac{ik_y l}{\Delta_{изг}} \right), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{пр}} &= \omega^2 \rho h l (k_y^2 / k_{\text{пр}}^2 - 1), \quad k_{\text{пр}} = \omega (\rho / E)^{1/2}, \\ \Delta_{\text{изг}} &= \omega^2 \rho h l [(k_y^4 - k_y^2 k_t^2) / k_{\text{изг}}^4 - 1], \\ k_{\text{изг}}^2 &= \omega (3 \rho / E l^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Аналогично для изгибных колебаний полосы

$$\begin{aligned}J_{tt}^p &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta_t} + \frac{l^2}{\Delta_{\text{кр}}} \right), \\ J_{\alpha\alpha}^p &= \frac{1}{2} \left[\frac{(k_y^4 - k^4) l^2}{\Delta_t} + \frac{1}{\Delta_{\text{кр}}} \right], \\ J_{t\alpha}^p &= J_{\alpha t}^p = \frac{1}{2} \left(-\frac{\nu k_y^2 l}{\Delta_t} - \frac{l}{\Delta_{\text{кр}}} \right),\end{aligned}\tag{2.14}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_t &= D l [k_y^4 (1 - \nu^2) - k^4], \\ \Delta_{\text{кр}} &= G h^3 l / 3 [k_y^2 - k_{\text{кр}}^2], \quad k_{\text{кр}} = \omega l / h (\rho / G)^{1/2}.\end{aligned}$$

Таким образом, выражения (2.13) и (2.14) определяют линейные податливости несимметричного ребра жесткости в диапазоне частот и длин волн, когда его можно рассматривать как стержень.

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ НА БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

При нормальном падении волны на препятствие задача о прохождении изгибной волны в пластине становится эквивалентной задаче о прохождении волны через препятствие, укрепленное на стержне. В работах [17, 45] рассмотрены следующие препятствия: сосредоточенная масса, обладающая моментом инерции; пассивные антивибраторы. В этих работах сделан важный вывод о том, что масса, обладающая моментом инерции, способна полностью отразить падающую волну на определенной частоте.

В работах [47, 67] рассмотрены виброизолирующие свойства ребра жесткости. Виброизоляция высокого ребра жесткости при нормальном падении волны исследована в работе [33], а низкого ребра жесткости при произвольном угле падения — в работе [67]. В этих работах сделан важный вывод о том, что основное влияние на характер отражения оказывают направления совпадения.

В настоящей главе не рассматриваются препятствия, при которых пластина испытывает разрыв смещения (например, упругая прокладка), а также не учитывается ширина препятствия. Такие препятствия рассмотрены в работах [22—24].

Ниже рассмотрены отражающие свойства низкого и несимметричного высокого ребра жесткости. В этих задачах учтены продольные и поперечные волны, возникающие в пластинах при отражении.

Низкое ребро жесткости

Пусть в безграничной пластине толщиной h с изгибной жесткостью D и плотностью вещества ρ на линии $x = x_0$ имеется препятствие, однородное по длине и симметричное относительно нейтральной плоскости пластины. Если выделить из полного поля w_1 падающую плоскую изгибную волну¹ ($-\infty < x < \infty$)

$$w_0 = \exp[i\kappa(x - x_0)],$$

(где $\kappa = k \cos \theta$; $k_y = k \sin \theta$; w_j — смещение; θ — угол падения; k — волновое число падающей волны), то возникающее из-за препятствия вторичное поле $w = w_1 - w_0$ при $|x| \rightarrow \infty$ представляет собой уходящую от места контакта изгибную волну.

Коэффициент отражения можно записать как сумму коэффициентов для симметричного и антисимметричного полей: $V = V_F + V_M$, где V — коэффициент отражения однородной волны. Используя теперь контактные условия для сил и смещений и углов поворота

$$F + F_0 = 0, \quad M + M_0 = 0,$$

$$w_0(0) + w(0) = u, \quad [w_0(0)]'_x + [w(0)]'_x = \alpha,$$

а также условия

$$V_F = w(0) J_{I_0} / w_0(0) J_I, \quad V_M = [w(0)]'_x J_{\alpha_0} / [w_0(0)]'_x J_\alpha,$$

получим коэффициент отражения однородной волны

$$V = - [J_{I_0} / (I_I + J_{F\Pi})] + [J_{\alpha_0} / (J_\alpha + J_{M\Pi})] \quad (3.1)$$

или

$$V = [1 + (1/i\kappa)(k'_x + J_{M\Pi}/\beta)]^{-1} - [1 + i\kappa(1/k'_x - J_{F\Pi}/\beta)]^{-1}. \quad (3.2)$$

Коэффициент прохождения однородной волны при этом имеет вид $T = 1 + V_F - V_M$.

Рассмотрим частные простые случаи. Если пластина оперта вдоль линии $x = x_0$ ($J_{F\Pi} = 0$, $J_{M\Pi} = \infty$), то $|V|^2 = (1 + \sin^2\theta)/2$. При $\theta = 0$, $|V|^2 = 0,5$, т. е. при нормальном падении от шарнирной опоры отражается половина падающей энергии. Однако

¹ Множитель $\exp(ik_y y - i\omega t)$ ниже всюду опущен.

с возрастанием угла падения доля отраженной энергии увеличивается и $V \rightarrow -1$ при $\theta \rightarrow \pi/2$. Когда запрещен поворот пластин вдоль линии $x = x_0$ ($J_{F\Pi} = \infty$, $J_{M\Pi} = 0$), то $|V|^2 = \cos^2\theta/2$. В этом случае с изменением угла падения от 0 до $\pi/2$ $|V|^2$ изменяется от 0,5 до 0. Таким образом, при косом падении силовое сопротивление препятствия сильнее влияет на отражение изгибных волн, чем моментное, поскольку амплитуда смещений следа волны не изменяется с изменением угла падения, а амплитуда угла поворота следа волны уменьшается и равна нулю при $\theta = \pi/2$.

Как видно из выражения (3.1), прозрачность препятствия обусловлена компенсацией вкладов от силового и моментного взаимодействий. Условие прозрачности ($V=0$) можно записать в виде

$$(J_{F\Pi} + J_{I\Pi})/J_{I0} = (J_{M\Pi} + J_{a\Pi})/J_{a0}, \quad (3.3)$$

или

$$(J_{F\Pi} - \beta/\kappa')\kappa^2 = J_{M\Pi} + \kappa'\beta. \quad (3.4)$$

Условие полного отражения ($T=0$) имеет вид

$$(J_{F\Pi} + J_{I\Pi})/J_{I0} = J_{a0}/(J_{M\Pi} + J_{a\Pi}), \quad (3.5)$$

или

$$(1/\kappa' - J_{F\Pi}/\beta)(J_{M\Pi}/\beta + \kappa') = 1. \quad (3.6)$$

В случае нормального падения выражения (3.2) — (3.4) согласуются с известными [67].

Если препятствие обладает только сопротивлением к перемещению пластины ($J_{M\Pi} = \infty$), то частотой запирания будет резонансная частота, находящаяся из уравнения $J_{F\Pi} + J_{I\Pi} = 0$. Так как проводимость $J_{I\Pi}$ массовая, то препятствие при этом должно иметь характер упругости. Если препятствие обладает только сопротивлением повороту ($J_{F\Pi} = \infty$), то частота запирания определяется уравнением $J_{M\Pi} + J_{a\Pi} = 0$, и так как проводимость $J_{a\Pi}$ упругая, то препятствие должно иметь характер момента инерции.

Интересно проследить аналогию со стержнем. Если на стержне укреплен антивибратор, не оказывающий сопротивления повороту, то частота запирания $\omega = [K_a(1/m_a + 1/M_a)]^{1/2}$ (где m_a — масса антивибратора; K_a — его упругость; $M_a = 4\rho h/k$ — эквивалентная масса для неоднородной волны в стержне) оказывается выше парциальной частоты антивибратора — результат, полученный и проверенный экспериментально в работе [17]. Если на стержне укреплен антивибратор, не оказывающий сопротивления перемещению стержня, то частота запирания, определяемая равенством $\omega = [I_a(C_a + C_a)]^{1/2}$ (где I_a — момент инерции антивибратора; C_a — его крутильная жесткость; $C_a = k/4D$ — эквивалентная крутильная жесткость для неоднородной волны в стержне), будет ниже парциальной частоты антивибратора, что согласуется с результатами, полученными и проверенными экспериментально в работе [17].

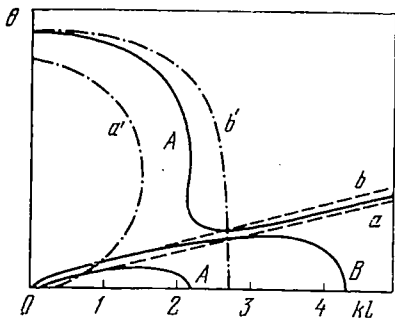
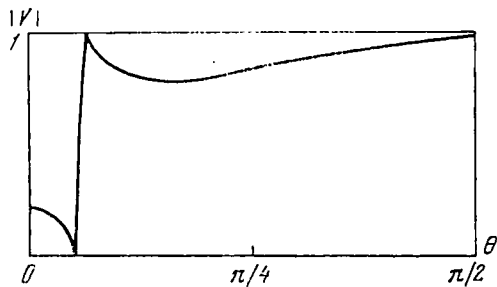


Рис. 1. Линии уровня коэффициента отражения от низкого ребра жесткости

$a, b - J_{M\Pi} = \infty$; $a', b' - J_{F\Pi} = \infty$; a — совпадение изгибных волн ребра ($\theta_{изг} = \arcsin 0,25$ — угол совпадения); a' — совпадение крутильных колебаний ребра; b, b' — полное отражение; A, B — условия прозрачности и заштриховки [уравнения (3.4) и (3.6)]

Рис. 2. Зависимость $|V|$ от угла падения для низкого ребра жесткости ($kl = 0,75$)



Пусть теперь препятствием является ребро жесткости $J_{F\Pi}^{-1} = B(k_y^4 - k_{изг}^4)$, $J_{M\Pi}^{-1} = GI_{кр}(k_y^2 - k_{кр}^2)$. При подстановке этих выражений в формулу (3.2) получим коэффициент отражения, согласующийся по форме с выражением работы [67]. Рассмотрим частный случай, когда высота ребра жесткости $l = 16h$, ширина $h_1 = 2h$. Для этого случая на рис. 1 в полярных координатах (kl, θ) построены кривые, определяемые выражениями (3.4) — (3.6). Точка пересечения штрихпунктирной кривой и штриховой кривой a находится на сплошной кривой A и соответствует прозрачности ребра жесткости, обусловленной совпадением как изгибных, так и крутильных колебаний. При этом неоднородные волны не возникают. Точка пересечения штрихпунктирной кривой b и штриховой кривой b лежит на сплошной кривой A и соответствует прозрачности ребра, обусловленной компенсацией вкладов в отраженное поле от силового и моментного взаимодействий. Отражение в этом случае для каждого вида взаимодействия равно по модулю единице. Как видно из рис. 1, влияние моментного сопротивления ребра проявляется, если $kl > 1$. При этом в ребре возникают волновые явления и выражения $J_{M\Pi}$ становятся неточными. При выполнении условия ($kl < 1$) крутильное сопротивление ребра практически не оказывает влияния на отражение волны, которое обусловлено только силовым сопротивлением ребра. На рис. 2 показаны значения модуля коэффициента отражения в зависимости от угла падения при значении kl , равном 0,75. Как видно из рисунка, углы полного отражения и полного прохождения разделяют две характерные области слабого и сильного отражения.

Линейное несимметричное препятствие

На безграничной пластине вдоль оси y расположено несимметричное относительно нейтральной плоскости пластины препятствие, колебания которого характеризуются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_x^n \\ u_\alpha^n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} J_{tt}^n & J_{t\alpha}^n \\ J_{\alpha t}^n & J_{\alpha\alpha}^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_x^n \\ F_\alpha^n \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} u_z^n \\ u_y^n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} J_{nn}^n & J_{nl}^n \\ J_{ln}^n & J_{ll}^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_z^n \\ F_y^n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где J_{ik}^n — податливости препятствия; F_x^n, F_y^n, F_z^n и F_α^n — амплитуды сил и момента сил; $u_z^n, u_x^n, u_y^n, u_\alpha^n$ — смещение и угол поворота контактной полоски. Такими зависимостями, к примеру, характеризуется полубезграничная пластина или несимметричное ребро жесткости, жестко скрепленные с безграничной пластиной нормально к ней.

Выделим из общего поля в безграничной пластине падающую плоскую изгибную волну и прошедшую через препятствие волну той же амплитуды:

$$u_z^0(x) = A \exp(ikx),$$

где $-\infty \leq x \leq \infty$. Контактные условия для сил и смещений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F + F^n &= 0, & M + F_\alpha^n &= 0, & u_x &= u_x^n, & u_y &= u_y^n, \\ u_z^0(0) + u_z &= u_z^n, & [u_z^0(0)]'_x + \alpha &= u_\alpha^n, \end{aligned}$$

где u, α — амплитуды смещения и угла поворота пластины в месте контакта для вторичного поля; F, F^n и M — амплитуды силы и момента сил.

Контактные условия для препятствия и пластины образуют две независимые системы уравнений, из которых можно найти безразмерную амплитуду смещения A_z и угла поворота A_α пластины в месте контакта для вторичного поля:

$$\begin{aligned} A_z &= - \frac{J_t}{J_l + J_{nn}^n - J_{nl}^n J_{ln}^n (J_l + J_{ll}^n)^{-1}}, \\ A_\alpha &= - \frac{J_\alpha}{J_\alpha + J_{\alpha\alpha}^n - J_{t\alpha}^n J_{\alpha t}^n (J_n + J_{tt}^n)^{-1}}. \end{aligned}$$

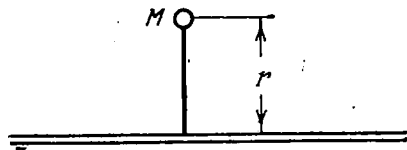
Коэффициент отражения однородной изгибной волны V образуется суммой коэффициентов отражения для симметричного вторичного поля V_c и для антисимметричного поля V_a , которые, как следует из выражений (2.11), зависят от безразмерных амплитуд

следующим образом: $V_c = A_2 J_{i0}/J_i$, $V_\alpha = -A_\alpha J_{\alpha 0}/J_\alpha$, и окончательно

$$V = - \frac{J_{i0}}{J_i + J_{nn}^n - [J_{ni}^n J_{in}^n / (J_i + J_{ii}^n)]} + \frac{J_{\alpha 0}}{J_\alpha + J_{\alpha\alpha}^n - [J_{i\alpha}^n J_{\alpha i}^n / (J_n + J_{ii}^n)]}.$$

Прозрачность препятствия, так же как и в случае симметричного препятствия, обусловлена компенсацией вкладов в отраженное поле от симметричных и антисимметричных колебаний,

Рис. 3. Несимметричное препятствие — точечная масса на невесомом стержне



за исключением тривиального случая, когда все податливости препятствия обращаются в бесконечность.

В некоторых случаях для расчетов можно воспользоваться следующей записью коэффициента отражения:

$$V = - \frac{J_{i0}}{J_i + J_{nn}^n (J_i + 1/C_{ii}^n) / (J_i + J_{ii}^n)} - \frac{J_{\alpha 0}}{J_\alpha + J_{\alpha\alpha}^n (J_n + 1/C_{ii}^n) / (J_n + J_{ii}^n)}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим частный случай несимметричной массы, укрепленной на стержне (рис. 3).

Точечная масса M_T жестко прикреплена к стержню бесконечно жестким невесомым стержнем длиной r . Элементы матрицы податливостей и жесткостей для этого препятствия имеют вид

$$\begin{aligned} J_{nn}^n &= -1/\omega^2 M_T, \\ C_{ii}^n &= -\omega^2 M_T, & C_{i\alpha}^n &= -\omega^2 M_T r, \\ C_{\alpha i}^n &= -\omega^2 M_T r, & C_{\alpha\alpha}^n &= -\omega^2 M_T r^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Детерминант матрицы (3.8) равен нулю. Придавая небольшой момент инерции точечной массе, можно найти отношение диагональных членов матрицы податливостей:

$$J_{\alpha\alpha}^n / J_{ii}^n = 1/r^2. \quad (3.9)$$

Подставляя выражения (3.8) и (3.9) в формулу (3.7), получим коэффициент отражения от несимметричной массы:

$$V = - \frac{J_{i0}}{J_i - 1/\omega^2 M_T} + \frac{J_{\alpha 0}}{J_\alpha + J_n / r^2 - 1/\omega^2 M_T r^2},$$

или

$$V = - (1 + i + 2i\rho S\lambda_l / \pi M_T)^{-1} + [1 - i + i(\beta S\lambda^3 / 2\pi^3 M_T r^2) + (\lambda^3 / 2\pi^2 \lambda_l r^2)]^{-1},$$

где S — площадь поперечного сечения стержня; λ — длина изгибной волны; λ_l — длина продольной волны.

Наличие в знаменателе второго слагаемого члена, равного отношению активных проводимостей для однородной изгибной волны и для продольной волны, приводит к тому, что условия прозрачности и полного отражения не удовлетворяются. Таким образом, энергия более равномерно отражается в обе стороны от препятствия как в виде изгибных волн, так и в виде продольных. Однако если выполняется неравенство $\lambda^3 \ll 2\pi^2\lambda_l r^2$, то утечкой энергии в виде продольных волн можно пренебречь.

Высокое ребро жесткости

Подставив в формулу (3.7) выражение для элементов матриц податливостей несимметричного ребра жесткости (2.12), получим коэффициент отражения в виде

$$V = - \frac{J_{t0}}{J_t + \frac{1}{2} [J_{nn}^c + J_{nn}^a - (J_{nl}^c + J_{nl}^a) (J_{ln}^c + J_{ln}^a) / (2J_t + J_{ll}^c + J_{ll}^a)]} - \frac{J_{\alpha 0}}{J_\alpha + \frac{1}{2} [J_{\alpha\alpha}^c + J_{\alpha\alpha}^a - (J_{l\alpha}^c + J_{l\alpha}^a) (J_{\alpha l}^c + J_{\alpha l}^a) / (2J_n + J_{ll}^c + J_{ll}^a)]}$$

Если длина изгибной падающей волны много больше высоты ребра, то второе слагаемое практически не оказывает влияния на отражение волн. При условии $2h\lambda \gg h_p l$ (где h_p — толщина ребра), если не считать практически неощутимой узкой области совпадения следа с длиной поперечной волны в пластине, коэффициент отражения

$$V = - J_{t0} / (J_t + 1/C_{nn}^p),$$

и ребро можно рассматривать как симметричное с изгибной жесткостью, в 4 раза превышающей его собственную. Зависимость коэффициента отражения от угла падения для такого ребра изображена на рис. 1.

Рассмотрим частный случай, когда выполняются неравенства: $2J_t \ll J_{ll}^c + J_{ll}^a$, $2J_n \ll J_{ll}^c + J_{ll}^a$, т.е. когда контактная полоска не смещается в плоскости пластины. Диапазон частот и углов падения, в котором удовлетворяются эти неравенства, зависит от соотношения размеров ребра и пластины.

Ниже это будет проанализировано более подробно. Тогда коэффициент отражения имеет следующий вид:

$$V = - \frac{J_{t0}}{J_t + 1/C_{nn}^p} + \frac{J_{\alpha 0}}{J_\alpha + 1/C_{\alpha\alpha}^p}, \quad (3.10)$$

где $C_{nn}^p = [2J_{nn}^a(4l)]^{-1}$, $C_{\alpha\alpha}^p = [2J_{\alpha\alpha}^a(4l)]^{-1}$ — элементы матриц жесткостей несимметричного ребра; $J_{nn}^a(4l)$, $J_{\alpha\alpha}^a(4l)$ — элементы

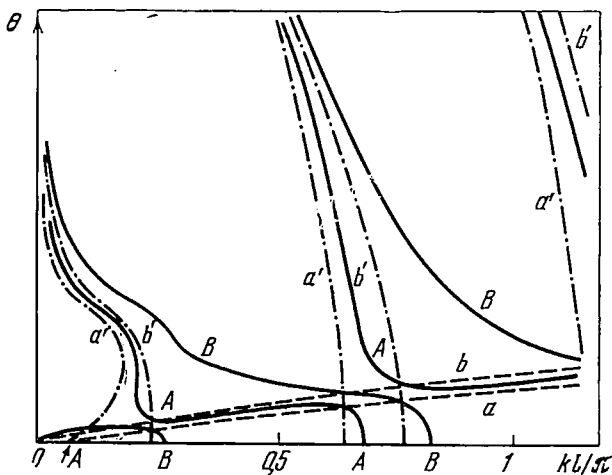


Рис. 4. Линии уровня коэффициента отражения от высокого ребра жесткости

$a, b - C_{\alpha\alpha}^p = 0$; $a', b' - C_{nn}^p = 0$; a — совпадение антисимметричных нормальных продольно-поперечных волн ребра; a' — совпадение антисимметричных изгибных нормальных волн ребра шириной $4l$; b, b' — полное отражение; A, B — условия прозрачности и полного отражения для коэффициента отражения, определяемого формулой (3.10)

матриц податливостей для антисимметричных колебаний полосы шириной $4l$. Выражение (3.10) является точным решением для симметричного ребра жесткости шириной $4l$, жесткости которого уменьшены в 2 раза.

На рис. 4 для случая $h_1 = h, l = 8h, C_1 = 5 \text{ км/сек}, \nu = 0,31$ в полярных координатах (kl, θ) нанесены кривые, соответствующие прозрачности ребра и полному отражению. Как видно из сравнения рис. 1 и 4, есть сильное расхождение в результатах в области длин волн, сравнимых с высотой ребра жесткости.

Податливость пластины в своей плоскости приводит к тому, что при углах падения, меньших угла совпадения для поперечной волны в пластине, невозможно полное отражение и полная прозрачность, поскольку часть энергии падающей волны преобразуется в энергию продольных и поперечных волн в пластине. Для углов падения, больших угла совпадения для поперечной волны, неоднородные поперечные и продольные волны несколько влияют на расположение кривых прозрачности и полного отражения. При больших углах падения для изгибных колебаний ребро жесткости «размягчается» — его жесткость может уменьшиться в 1,5 раза. Однако в этом случае коэффициент отражения близок к единице и уменьшение жесткости ребра слабо влияет на его величину.

При малых углах падения преобразование изгибных волн в однородные продольную и поперечную волны происходит в основном из-за крутильных волн ребра жесткости, но величина коэффициента отражения также слабо меняется в этом случае.

Линейный звуковой мостик

Две плоскопараллельные пластины толщиной h жестко скреплены одна с другой с помощью бесконечной полосы, располагающейся между пластинами под прямым углом к ним (рис. 5). Высота полосы $2l$, толщина h_0 . Модуль упругости пластин E , полосы E_0 . Коэффициенты Пуассона для пластин и для полосы σ и σ_0 соответственно.

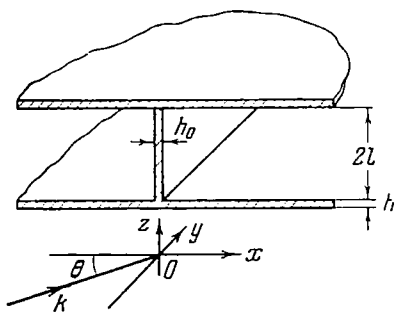


Рис. 5. Разрез звукового мостика

В нижней пластине на соединении из бесконечности падает изгибная волна с вектором смещения u_z , параллельным оси z :

$$u_z = A \exp(ikx), \quad x \leq 0.$$

Здесь и всюду ниже опущен множитель $\exp(iky - i\omega t)$, входящий во все характеристики поля.

Выделим из общего поля $u_{z\Pi}$ волну u_z , распространяющуюся в нижней пластине ($-\infty \leq x \leq \infty$). Вторичное поле $u_{zB} = u_{z\Pi} - u_z$ возбуждается смещением $u_z|_{x=0}$ и углом поворота $\alpha = (u_z)_x|_{x=0}$ выделенной волны. Вторичное поле можно представить как сумму четырех полей, соответствующих тому, что соединение имеет две плоскости симметрии, совпадающие с нейтральными плоскостями полосы: $I - (o, y, z)$; $II - (x, y, o)$.

Симметричные колебания относительно обеих плоскостей возбуждаются смещениями $\pm u_z/2|_{\substack{x=0 \\ z=\mp l}}$. Антисимметричные колебания относительно плоскости II и симметричные относительно плоскости I возбуждаются смещениями $u_z/2|_{\substack{x=0 \\ z=\mp l}}$. Симметричные колебания относительно плоскости II и антисимметричные относительно плоскости I возбуждаются углами поворота $\pm \alpha/2|_{\substack{x=0 \\ z=\mp l}}$. Антисимметричные колебания относительно обеих плоскостей возбуждаются углами поворота $\alpha/2|_{\substack{x=0 \\ z=\mp l}}$.

Коэффициент отражения однородной изгибной волны можно также записать в виде суммы четырех слагаемых, соответствующих изгибным волнам в нижней пластине для каждого типа колебаний вторичного поля:

$$V = V_{cc} + V_{ca} + V_{ac} + V_{aa}.$$

Коэффициенты прохождения легко найти, если известны значения каждого из четырех слагаемых.

Коэффициент прохождения однородной изгибной волны в ту же пластину

$$T = 1 + V_{cc} + V_{ca} - V_{ac} - V_{aa},$$

в левую часть верхней пластины

$$T_1 = -V_{cc} + V_{ca} - V_{ac} + V_{aa}$$

и в правую часть

$$T_2 = -V_{cc} + V_{ca} + V_{ac} - V_{aa}.$$

Из этих выражений можно найти коэффициент прохождения энергии изгибных волн в верхнюю пластину из нижней, т. е. величину, характеризующую эффективность звукового мостика:

$$T_3 = (-V_{cc} + V_{ca})(-V_{cc} + V_{ca})^* + (-V_{ac} + V_{aa})(-V_{ac} + V_{aa})^*,$$

где звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Значения четырех коэффициентов отражения можно выразить через амплитуды колебаний полосы контакта нижней пластины с полосой:

$$\begin{aligned} V_{cc} &= \frac{\operatorname{Re} J_t}{J_t} \cdot \frac{u_z^c}{u_z^a}, & V_{ca} &= \frac{\operatorname{Re} J_t}{J_t} \cdot \frac{u_z^a}{u_z^c}, \\ V_{ac} &= -\frac{\operatorname{Re} J_\alpha}{J_\alpha} \cdot \frac{\alpha^c}{\alpha}, & V_{aa} &= -\frac{\operatorname{Re} J_\alpha}{J_\alpha} \cdot \frac{\alpha^a}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Обозначим амплитуды смещений полосы на нижней линии соединения для симметричных колебаний относительно обеих плоскостей через (v_y^c, v_z^c) , а амплитуды сил через (P_y^c, P_z^c) . Контактные условия имеют вид

$$\begin{aligned} (v_y^c, v_z^c) &= (u_y^c, u_z^c) + (0, u_z/2), \\ (F_y^c, F_z^c) &= -(P_y^c, P_z^c). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Амплитуды сил и смещений полосы связаны эрмитовой матрицей жесткостей второго порядка:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y^c \\ v_z^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_y^c \\ P_z^c \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Пусть $\lambda_1^{cc}, \lambda_2^{cc}$ — собственные значения, а $\gamma_1^{cc}, \gamma_2^{cc}$ — углы наклона собственных векторов матрицы жесткостей. Тогда связь между компонентами собственных векторов имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda_1^{cc} (v_{1y}^c, v_{1z}^c) &= (P_{1y}^c, P_{1z}^c), \\ \lambda_2^{cc} (v_{2y}^c, v_{2z}^c) &= (P_{2y}^c, P_{2z}^c), \\ v_{1y}^c/v_{1z}^c &= P_{1y}^c/P_{1z}^c = \operatorname{tg} \gamma_1^{cc}, \quad v_{2y}^c/v_{2z}^c = P_{2y}^c/P_{2z}^c = \operatorname{tg} \gamma_2^{cc}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Далее компоненты смещений и сил на линии соединения равны сумме компонент собственных векторов:

$$\begin{aligned}(v_{1y}^c, v_{1z}^c) + (v_{2y}^c, v_{2z}^c) &= (v_y^c, v_z^c), \\ (P_{1y}^c, P_{1z}^c) + (P_{2y}^c, P_{2z}^c) &= (P_y^c, P_z^c).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Силы и смещения в пластине связаны двумя податливостями J_t и J_l :

$$J_t = v_z^c/F_z^c, \quad J_l = v_y^c/F_y^c.\quad (3.16)$$

Из выражений (3.11) — (3.16) после ряда преобразований можно получить амплитуду пластины

$$u_z^c/u_z = -J_t/2A,$$

где

$$A = J_t + \frac{[\operatorname{tg} \gamma_1^{cc} (\lambda_1^{cc} + C_l)]^{-1} - [\operatorname{tg} \gamma_2^{cc} (\lambda_2^{cc} + C_l)]^{-1}}{\lambda_1^{cc}/[\operatorname{tg} \gamma_1^{cc} (\lambda_1^{cc} + C_l)] - \lambda_2^{cc}/[\operatorname{tg} \gamma_2^{cc} (\lambda_2^{cc} + C_l)]}.$$

С помощью аналогичных вычислений находим амплитуду пластины поля, симметричного относительно плоскости I и антисимметричного относительно плоскости II :

$$u_z^a/u_z = -J_t/2A',$$

где

$$A' = J_t + \frac{[\operatorname{tg} \gamma_1^{ca} (\lambda_1^{ca} + C_l)]^{-1} - [\operatorname{tg} \gamma_2^{ca} (\lambda_2^{ca} + C_l)]^{-1}}{\lambda_1^{ca}/[\operatorname{tg} \gamma_1^{ca} (\lambda_1^{ca} + C_l)] - \lambda_2^{ca}/[\operatorname{tg} \gamma_2^{ca} (\lambda_2^{ca} + C_l)]}.$$

Собственные значения и углы наклона собственных векторов матриц, описывающих продольно-поперечные колебания, имеют следующий вид для симметричных колебаний относительно обеих плоскостей:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^{cc} &= \frac{\omega^2 \rho h}{2k_y} \cdot \frac{1 - (\kappa_l l \operatorname{tg} \kappa_l l)/(\kappa_l l \operatorname{ctg} \kappa_l l) \pm B}{\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l/k_y + k_y \operatorname{tg} \kappa_l l/\kappa_l}, \\ \operatorname{tg} \gamma_{1,2}^{cc} &= \frac{-1 - (\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l)/(\kappa_l \operatorname{ctg} \kappa_l l) \pm B}{(2ik_y^2/k_l^2) [2\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l/k_y - (\kappa_l^2 - k_y^2) \operatorname{tg} \kappa_l l/(k_l k_y)]},\end{aligned}$$

где

$$B = \left[\left(1 + \frac{\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l}{\kappa_l \operatorname{ctg} \kappa_l l} \right)^2 + \frac{4k_y^4}{k_l^4} \left(\frac{2\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l - \kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l}{k_y} + \frac{k_y \operatorname{tg} \kappa_l l}{\kappa_l} \right)^2 \right]^{1/2},$$

для симметричных относительно плоскости I и антисимметричных относительно плоскости II :

$$\lambda_{1,2}^{\text{ca}} = \frac{\omega^2 \rho h}{2k_y} \cdot \frac{1 - (\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l) / (\kappa_l \operatorname{ctg} \kappa_l l) \mp B'}{\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l / k_y + k_y \operatorname{tg} \kappa_l l / \kappa_l},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{1,2}^{\text{ca}} = \frac{1 + (\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l) / (\kappa_l \operatorname{ctg} \kappa_l l) \mp B'}{(2ik_y^2 / k_l^2) [2\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l / k_y - (\kappa_l^2 - k_y^2) \operatorname{tg} \kappa_l l / (k_y \kappa_l)]},$$

где

$$B' = \left[\left(1 + \frac{\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l}{\kappa_l \operatorname{ctg} \kappa_l l} \right)^2 + \frac{4k_y^4}{k_l^4} \left(\frac{2\kappa_l \operatorname{tg} \kappa_l l - \kappa_l^2 \operatorname{tg} \kappa_l l / \kappa_l}{k_y} + \frac{k_y \operatorname{tg} \kappa_l l}{\kappa_l} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Для антисимметричных колебаний относительно плоскости I можно написать уравнения, аналогичные (3.14) и (3.15). Обозначим амплитуды смещений полосы на нижней линии соединения для симметричных колебаний относительно плоскости I и антисимметричных относительно плоскости II через $(v_x^{\text{ac}}, v_\alpha^{\text{ac}})$, а амплитуды сил через $(P_x^{\text{ac}}, P_\alpha^{\text{ac}})$. Для колебаний, симметричных относительно обеих плоскостей, введем обозначения для смещений $(v_x^{\text{aa}}, v_\alpha^{\text{aa}})$ и для сил $(P_x^{\text{aa}}, P_\alpha^{\text{aa}})$. Тогда контактные условия можно записать так:

$$(v_x^{\text{ac, aa}}, v_\alpha^{\text{ac, aa}}) = (u_x^{\text{ac}}, u_\alpha^{\text{ac}}) + (0, u_\alpha / 2),$$

$$(F_x^{\text{ac, aa}}, F_\alpha^{\text{ac, aa}}) = -(P_x^{\text{ac, aa}}, P_\alpha^{\text{ac, aa}}).$$

Пусть $\lambda_1^{\text{ac}}, \lambda_2^{\text{ac}}, \lambda_1^{\text{aa}}, \lambda_2^{\text{aa}}$ — собственные значения, а $\gamma_1^{\text{ac}}, \gamma_2^{\text{ac}}, \gamma_1^{\text{aa}}, \gamma_2^{\text{aa}}$ — углы наклона собственных векторов матриц жесткостей полосы второго порядка для изгибных колебаний. Тогда связь между компонентами собственных векторов имеет вид

$$\lambda_1^{\text{ac}} (v_{1x}^{\text{ac}}, v_{1\alpha}^{\text{ac}}) = (P_{1x}^{\text{ac}}, P_{1\alpha}^{\text{ac}}),$$

$$\lambda_2^{\text{ac}} (v_{2x}^{\text{ac}}, v_{2\alpha}^{\text{ac}}) = (P_{2x}^{\text{ac}}, P_{2\alpha}^{\text{ac}}),$$

$$\lambda_1^{\text{aa}} (v_{1x}^{\text{aa}}, v_{1\alpha}^{\text{aa}}) = (P_{1x}^{\text{aa}}, P_{1\alpha}^{\text{aa}}),$$

$$\lambda_2^{\text{aa}} (v_{2x}^{\text{aa}}, v_{2\alpha}^{\text{aa}}) = (P_{2x}^{\text{aa}}, P_{2\alpha}^{\text{aa}}).$$

$$v_{1\alpha}^{\text{ac}} / v_{1x}^{\text{ac}} = P_{1\alpha}^{\text{ac}} / P_{1x}^{\text{ac}} = \operatorname{tg} \gamma_1^{\text{ac}}, \quad v_{2\alpha}^{\text{ac}} / v_{2x}^{\text{ac}} = P_{2\alpha}^{\text{ac}} / P_{2x}^{\text{ac}} = \operatorname{tg} \gamma_2^{\text{ac}},$$

$$v_{1\alpha}^{\text{aa}} / v_{1x}^{\text{aa}} = P_{1\alpha}^{\text{aa}} / P_{1x}^{\text{aa}} = \operatorname{tg} \gamma_1^{\text{aa}}, \quad v_{2\alpha}^{\text{aa}} / v_{2x}^{\text{aa}} = P_{2\alpha}^{\text{aa}} / P_{2x}^{\text{aa}} = \operatorname{tg} \gamma_2^{\text{aa}}.$$

Далее компоненты смещений и сил на линии соединения равны сумме компонент собственных векторов:

$$\begin{aligned}(v_{1x}^{ac}, v_{1\alpha}^{ac}) + (v_{2x}^{ac}, v_{2\alpha}^{ac}) &= (v_x^{ac}, v_\alpha^{ac}), \\ (v_{2x}^{aa}, v_{2\alpha}^{aa}) + (v_{1x}^{aa}, v_{1\alpha}^{aa}) &= (v_x^{aa}, v_\alpha^{aa}), \\ (P_{1x}^{ac}, P_{1\alpha}^{ac}) + (P_{2x}^{ac}, P_{2\alpha}^{ac}) &= (P_x^{ac}, P_\alpha^{ac}), \\ (P_{1x}^{aa}, P_{1\alpha}^{aa}) + (P_{2x}^{aa}, P_{2\alpha}^{aa}) &= (P_x^{aa}, P_\alpha^{aa}).\end{aligned}$$

Определим податливость пластины в направлении x :

$$J_n = u_x / F_x = \gamma (\kappa_x / k_y + k_y / \kappa_x).$$

Из выражений (3.17) и (3.18) после ряда преобразований находим амплитуды угла поворота пластины и полосы в месте контакта. Обозначим $v_\alpha = \alpha$. Тогда

$$\alpha^{ac} / \alpha = -J_\alpha / 2B'',$$

где

$$B'' = J_\alpha + \frac{[\operatorname{tg} \gamma_1^{ac} (\lambda_1^{ac} + C_\Pi)]^{-1} - [\operatorname{tg} \gamma_2^{ac} (\lambda_2^{ac} + C_\Pi)]^{-1}}{\lambda_1^{ac} / [\operatorname{tg} \gamma_1^{ac} (\lambda_1^{ac} + C_\Pi)] - \lambda_2^{ac} / [\operatorname{tg} \gamma_2^{ac} (\lambda_2^{ac} + C_\Pi)]},$$

и

$$\alpha^{aa} / \alpha = -J_\alpha / 2B''',$$

где

$$B''' = J_\alpha + \frac{[\operatorname{tg} \gamma_1^{aa} (\lambda_1^{aa} + C_\Pi)]^{-1} - [\operatorname{tg} \gamma_2^{aa} (\lambda_2^{aa} + C_\Pi)]^{-1}}{\lambda_1^{aa} / [\operatorname{tg} \gamma_1^{aa} (\lambda_1^{aa} + C_\Pi)] - \lambda_2^{aa} / [\operatorname{tg} \gamma_2^{aa} (\lambda_2^{aa} + C_\Pi)]}.$$

Выпишем подробно выражения для собственных значений и углов наклона собственных векторов:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^{ac} &= \frac{k^2 l^2 - k^2 l^4 \kappa \kappa' \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l \mp [k^4 l^4 (1 + \kappa \kappa' l^2 \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l)^2 + A]^{1/2}}{l^4 (\kappa \operatorname{tg} \kappa l + \kappa' \operatorname{th} \kappa' l) / D}, \\ \operatorname{tg} \gamma_{1,2}^{ac} &= \frac{k^2 l^2 + k^2 l^2 \kappa \kappa' l^2 \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l \mp [k^4 l^4 (1 + \kappa \kappa' l^2 \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l)^2 + A]^{1/2}}{l^3 [\kappa' \operatorname{th} \kappa' l (\kappa^2 + \nu k_y^2) - \kappa \operatorname{tg} \kappa l (\kappa'^2 - \nu k_y^2)]},\end{aligned}$$

$$\text{где } A = l^6 [\kappa' \operatorname{th} \kappa' l (\kappa^2 + \nu k_y^2) - \kappa \operatorname{tg} \kappa l (\kappa'^2 - \nu k_y^2)]^2.$$

Далее для антисимметричных колебаний относительно обеих плоскостей

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^{aa} &= \frac{k^2 l^2 \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l - k^2 l^4 \kappa \kappa' - k^2 l^4 \kappa \kappa' \mp [k^4 l^4 (\operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l + l^2 \kappa \kappa')^2 + B]^{1/2}}{l^4 (\kappa \operatorname{th} \kappa' l - \kappa' \operatorname{tg} \kappa l) / D}, \\ \operatorname{tg} \gamma_{1,2}^{aa} &= \frac{l^4 k^2 \kappa \kappa' + k^2 l^2 \operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l \mp [k^4 l^4 (\operatorname{tg} \kappa l \operatorname{th} \kappa' l + l^2 \kappa \kappa')^2 + B]^{1/2}}{l^3 [-\kappa' \operatorname{tg} \kappa l (\kappa^2 + \nu k_y^2) - \kappa \operatorname{th} \kappa' l (\kappa'^2 - \nu k_y^2)]},\end{aligned}$$

$$\text{где } B = l^6 [-\kappa' \operatorname{tg} \kappa l (\kappa^2 + \nu k_y^2) - \kappa \operatorname{th} \kappa' l (\kappa'^2 - \nu k_y^2)]^2.$$

Таким образом, все четыре коэффициента выражены через частоту, угол падения волны и параметры пластин и полосы.

Рассмотрим теперь случай низких частот, т. е. когда выполняются неравенства $\kappa_l l \ll 1$, $\kappa_l l \ll 1$, $\kappa l \ll 1$, $\kappa' l \ll 1$. В этом случае выражения для податливостей, собственных значений и углов наклона собственных векторов упрощаются (положим при этом $h_0 = h$):

$$\lambda_1^{cc} \approx \frac{\omega^2 \rho h}{2k_y} \cdot \frac{2 + (2k_y^2/k_l^4) (2k_l^2 - k_l^2)^2 l^4 / (k_y l)^2}{(k_l l)^2 / k_y l},$$

$$\lambda_2^{cc} \approx \frac{\omega^2 \rho h}{2k_y} \cdot \frac{-2 (\kappa_l l)^2 - (2k_y^4/k_l^4) (2k_l^2 - k_l^2)^2 l^4 / (k_y l)^2}{(k_l l)^2 / k_y l},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1^{cc} \approx - (2ik_y^2/k_l^2) (2k_l^2 - k_l^2) l^2 / 2k_y l,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2^{cc} \approx - 2 / (2ik_y^2/k_l^2) \cdot (2k_l^2 - k_l^2) l^2 / k_y l.$$

В этом случае выполняется неравенство $|\lambda_1^{cc}| \gg |C_l| \gg \gg |\lambda_2^{cc}|$. Учитывая ортогональность собственных векторов ($\operatorname{tg} \gamma_1 = - (\operatorname{tg} \gamma_2)^{-1}$), получим $|\operatorname{tg} \gamma_1 / \operatorname{tg} \gamma_2| \ll 1$. Поскольку $J_l \gg 1/\lambda_1^{cc}$, то $u_z^c / u_z \approx -0,5$.

У матрицы жесткостей полосы для колебаний, симметричных относительно плоскости II , антисимметричных относительно плоскости I , приближенные выражения собственных значений и углов наклона собственных векторов на низких частотах имеют следующий вид:

$$\lambda_1^{ca} \approx -\omega^2 \rho h l, \quad \lambda_2^{ca} \approx \omega^2 \rho h l / (k_l l)^2,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1^{ca} \approx ik_y l, \quad \operatorname{tg} \gamma_2^{ca} \approx -1 / ik_y l.$$

На низких частотах удовлетворяется неравенство

$$|\lambda_2^{ca}| \gg |C_l| \gg |\lambda_1^{ca}|.$$

Поскольку $|\operatorname{tg} \gamma_1 / \operatorname{tg} \gamma_2| \ll 1$, то можно написать

$$u_z^a / u_z = -J_l / 2 (J_l + 1/\lambda_1^{ca}),$$

и так как $J_l \ll 1/\lambda_1^{ca}$, то $u_z^a / u_z \approx -J_l \lambda_1^{ca} / 2 \approx 0$, т. е. на самых низких частотах смещением пластин в направлении оси y можно пренебречь. Найдем приближенные выражения для матриц жесткостей полосы для антисимметричных колебаний относительно плоскости I :

$$\lambda_1^{ac} = -D \{k^4 - (1 - \sigma^2) k_y^4\} l,$$

$$\lambda_2^{ac} = D (1 + k_y^4 l^4) / l^3, \quad \operatorname{tg} \gamma_1^{ac} = -\nu k_y^2 l^2, \quad \operatorname{tg} \gamma_2^{ac} = 1 / \nu k_y^2 l^2.$$

На низких частотах выполняется неравенство $|\lambda_2^{ac}| \gg |C_n| \gg |\lambda_1^{ac}|$. Учитывая, что $|\operatorname{tg} \gamma_1^{ac} / \operatorname{tg} \gamma_2^{ac}| \ll 1$, получим

$$\alpha^{ac}/\alpha \approx -J_\alpha/2 (J_\alpha + 1/\lambda_1^{ac}),$$

и поскольку $J_\alpha \ll 1/\lambda_1^{ac}$, то $\alpha^{ac}/\alpha \approx -J_\alpha \lambda_1^{ac}/2 \approx 0$.

Найдем теперь приближенные выражения для собственных значений и углов наклона собственных векторов полосы при антисимметричных колебаниях относительно обеих плоскостей:

$$\lambda_1^{aa} \approx -3D \left[1 - \frac{(1-\nu) k_y^2}{2k^2} \right] / l^3,$$

$$\lambda_2^{aa} \approx -3D \left[1 + \frac{(1-\nu) k_y^2}{2k^2} \right] / l^3, \quad \operatorname{tg} \gamma_1^{aa} \approx 1, \quad \operatorname{tg} \gamma_2^{aa} \approx -1.$$

На низких частотах справедливо неравенство $\lambda_1^{ac} \approx \lambda_2^{aa} \gg \gg C_n$. Отсюда

$$\alpha^{aa}/\alpha = -J_\alpha/2 [J_\alpha + 1/2\lambda_1^{aa} + 1/2\lambda_2^{aa}],$$

и поскольку $I_\alpha \gg (1/2) (1/\lambda_1^{ac} + 1/\lambda_2^{ac})$, то $\alpha^{aa}/\alpha = -1/2$.

Коэффициент прохождения по энергии на низких частотах будет равен следующему выражению:

$$T_\alpha \approx \frac{(\operatorname{Re} J_l)^2}{4J_l J_l^*} + \frac{(\operatorname{Re} J_\alpha)^2}{4J_\alpha J_\alpha^*} = \frac{\cos^2 \theta}{4} + \frac{\sin^2 \theta}{4} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, на самых низких частотах звуковой мостик передает четверть падающей энергии.

Глава 4

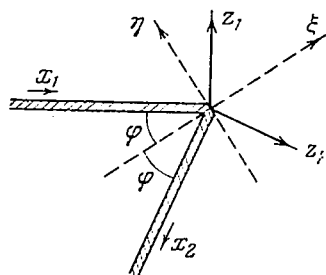
УГЛОВОЕ СОЕДИНЕНИЕ ПЛАСТИН

Угловое соединение пластин встречается повсеместно в инженерных конструкциях. При нормальном падении волн на соединение задача о прохождении волны становится эквивалентной задаче о прохождении волны через стык двух стержней. Последняя задача рассматривалась в работе [15], где угол соединения стержней полагался равным 0 и $\pi/2$. При этом рассматривалось отражение как изгибной, так и продольной волны. В работе [33] рассмотрено прохождение изгибной волны через угловое соединение пластин с существенным ограничением — скорости продольных и поперечных волн бесконечны. Ниже задача рассматривается в точной постановке, с учетом продольных и поперечных волн, возникающих при отражении.

Жесткое соединение пластин

Плоская изгибная волна падает из бесконечности под углом θ на стык двух полубезграничных пластин одинаковой толщины h . Пластины жестко соединены между собой под углом 2φ . Расположим ось y вдоль линии соединения. Введем две системы координат так, чтобы в пластине I $x_1 \leq 0$, а в пластине II $x_2 \geq 0$ (рис. 6). Оси z_1 и z_2 направлены при этом нормально поверхностям

Рис. 6. Разрез углового соединения пластин и системы координат. Ось y расположена нормально к плоскости чертежа



каждой из пластин так, что две полуплоскости ($z_1 = 0$ при $x_1 \leq 0$ и $z_2 = 0$ при $x_2 \geq 0$) совпадают с нейтральными плоскостями пластин. Введем обозначение: $(x, z) = (x_1, z_1)$ при $x < 0$; $(x, z) = (x_2, z_2)$ при $x > 0$. Тогда смещения точек нейтральных плоскостей u_x и u_y будут характеризовать продольные и поперечные волны, а смещение u_z — изгибные. Выделим из полного поля падающую плоскую изгибную волну: $u_z(x) = A \exp(i kx)$, где $-\infty \leq x \leq \infty$. Тогда вторичное поле u^I в пластине I и u^{II} в пластине II при $|x| \rightarrow \infty$ представляет собой уходящую от соединения волну. Граничные условия для жесткого соединения пластин имеют вид

$$u^I(0) = u^{II}(0), \quad \alpha^I = \alpha^{II}, \quad F^I + F^{II} = 0, \quad M^I + M^{II} = 0, \quad (4.1)$$

где F^I и M^I — амплитуды сил и моментов сил, действующих на пластину.

Расположим вспомогательную ортогональную систему координат (ξ, y, η) так, чтобы ось ξ делила угол между пластинами пополам (см. рис. 6). Соединение симметрично относительно плоскости $\eta = 0$, и поле, возбужденное падающей волной, распадается на два линейно независимых поля — симметричное и антисимметричное. Следовательно, коэффициент отражения однородной изгибной волны можно записать в виде суммы двух слагаемых: $V = V_c + V_a$, где V_c и V_a — коэффициенты отражения для симметричных и антисимметричных колебаний соответственно. Коэффициент прохождения однородной изгибной волны запишется при этом в виде $T = 1 + V_c - V_a$.

Симметричное поле возбуждается смещением падающей волны, а антисимметричное вторичное поле — перерезывающими силами

$F_{\text{пер}}^I$ и $F_{\text{пер}}^{II}$ ($-F_{\text{пер}}^I = F_{\text{пер}}^{II}$) падающей волны, где $F_{\text{пер}}^I$ действует со стороны пластины I, а $F_{\text{пер}}^{II}$ — со стороны пластины II. Симметричное вторичное поле должно удовлетворять следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u_{\xi}^I(x) &= u_{\xi}^{II}(-x), & u_y^I(x) &= u_y^{II}(-x), & u_{\eta}^I(x) &= -u_{\eta}^{II}(-x), \\ \alpha^I + \alpha^{II} &= 0, & F_{\xi}^I - F_{\xi}^{II} &= 0, & F_y^I &= F_y^{II}, & F_{\eta}^I &= -F_{\eta}^{II}, \\ M^I + M^{II} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Сравнение равенств (4.2) и граничных условий (4.1) дает граничные условия для симметричных колебаний:

$$u_{\eta}^I(0) = 0, \quad F_{\xi}^I = 0, \quad F_y^I = 0, \quad \alpha^I = 0. \quad (4.3)$$

Колебания границы вдоль координаты ξ должны удовлетворять системе двух уравнений

$$\begin{aligned} u_{\xi}^I(0) &= [u_z(0) + u_z^I(0)]/\sin \varphi = u_x^I(0)/\cos \varphi, \\ F_{\xi}^I &= F_z^I \sin \varphi + F_x^I \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

при выполнении условий (4.3).

Антисимметричное поле удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u_{\xi}^I(x) &= -u_{\xi}^{II}(-x), & u_y^I(x) &= -u_y^{II}(-x), & u_{\eta}^I(x) &= u_{\eta}^{II}(-x), \\ \alpha^I &= \alpha^{II}, & F_{\xi}^I + F_{\xi}^{II} &= 0, & F_{\eta}^I &= F_{\eta}^{II}, & M^I &= M^{II}, \\ F_y^I + F_y^{II} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сравнение равенств (4.5) и граничных условий (4.1) дает граничные условия для антисимметричных колебаний соединения:

$$u_{\xi}^I(0) = 0, \quad u_y^I(0) = 0, \quad F_{\eta}^I = 0, \quad M^I = 0. \quad (4.6)$$

Колебания вдоль координаты η должны удовлетворять системе двух уравнений

$$\begin{aligned} u_{\eta}^I(0) &= u_z^I(0)/\cos \varphi = -u_x^I(0)/\sin \varphi, \\ F_{\eta}^I &= F_z^I \cos \varphi - F_x^I \sin \varphi + F_{\text{пер}}^I \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

при выполнении условий (4.6).

Подстановка податливостей и жесткостей полубесконечной пластины (2.9) и (2.10) в системы (4.4) и (4.7) приводит к следующим выражениям для безразмерной амплитуды смещения линии соединения A_c для симметричных колебаний и безразмерной амплитуды перерезывающей силы A_a для изгибных антисимметричных колебаний пластины I:

$$\begin{aligned} A_c &= u_z^I(0)/u_z(0) = -C_{II}^{-1}/(C_{II}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi J_{nn}), \\ A_a &= -F_z^I/F_{\text{пер}}^I = J_{II}^{-1}/(J_{II}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi C_{nn}). \end{aligned}$$

Введем дополнительные обозначения:

$$C_{it}^{-1} = J_{i0} + J_{iH}, \quad J_{it}^{-1} = C_{i0} + C_{iH}, \quad (4.8)$$

где символами J_{i0} , C_{i0} обозначены мнимые части, а символами J_{iH} , C_{iH} — действительные части выражений C_{it}^{-1} и J_{it}^{-1} . Из условия для симметричного поля следует равенство $-ik u_{z0}^I + \kappa' u_{zH}^I = 0$, где u_{z0}^I , u_{zH}^I — амплитуды однородной и неоднородной волн на границе. Отсюда $u_{z0}^I/u_z^I(0) = C_{it} J_{i0}$ и коэффициент отражения для симметричного поля равен

$$V_c = u_{z0}^I/u_z(0) = A_c u_{z0}^I/u_z^I(0) = -J_{i0}/(C_{it}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi J_{in}).$$

Из условия $M^I = 0$ для антисимметричных колебаний следует равенство $F_{z0}^I/ik [k^2 + k_y^2 (1 - \nu)]^2 = F_{zH}^I/\kappa' [k^2 - k_y^2 (1 - \nu)]^2$, где F_{z0}^I и F_{zH}^I — перерезывающие силы для однородной и неоднородной изгибных волн соответственно. Отсюда $F_{z0}^I/F_z^I = C_{i0} J_{it}$ и коэффициент отражения для антисимметричного поля имеет вид

$$u_{z0}^I/u_z(0) = -F_{z0}^I/F_{\text{пер}}^I = A_a F_{z0}^I/F_z^I = C_{i0}/(J_{it}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi C_{in}). \quad (4.9)$$

Окончательно получаем следующее выражение для коэффициента отражения однородной изгибной волны:

$$V = - \frac{J_{i0}}{C_{it}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi J_{in}} + \frac{C_{i0}}{J_{it}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi C_{in}}.$$

Размерные коэффициенты, входящие в выражения для податливостей и жесткостей, сокращаются, и коэффициент отражения будет зависеть от отношений трех размерных величин k , k_l , k_t : $k_l/k = \sin \theta_l$, $k_t/k = \sin \theta_t$, где θ_l и θ_t — углы совпадения следа падающей волны с длинами продольной и поперечной волн соответственно. Таким образом, коэффициент отражения является функцией четырех углов: $V = f(\varphi, \theta, \theta_l, \theta_t)$. Углы θ_l и θ_t связаны соотношением $\sin \theta_l = \sin \theta_t [(1 - \nu)/2]^{1/2}$. Угол совпадения для продольной волны выражается через частоту f и параметры пластин

$$\sin \theta_l = (\pi f h / \sqrt{3} c_l)^{1/2},$$

где c_l — скорость продольной волны в пластине.

Рассмотрим отражение при различных углах соединения пластин.

1. $2\varphi = \pi$, $V \equiv 0$.

2. $\text{tg}^2 \varphi \gg 1$. В этом случае $C_{iH} + \text{tg}^2 \varphi C_{in} \gg C_{i0}$ и $V_a \approx 0$. Основное значение имеют симметричные колебания $V \approx V_c$. Условие полного отражения $J_{iH} + \text{tg}^2 \varphi J_{in} = 0$ может выполняться только при $\theta > \theta_t$. При $\sin^2 \theta \gg \sin^2 \theta_t$ это условие упрощается:

$$\sin^2 \theta_t \text{tg}^2 \varphi = [(1 + \nu) \sin \theta] / 2 \sqrt{1 + \sin^2 \theta}.$$

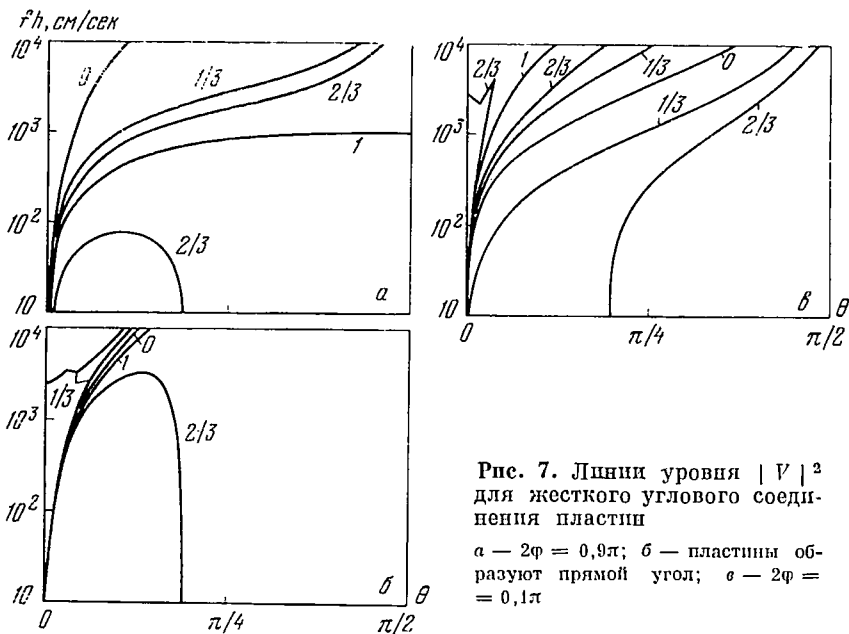


Рис. 7. Линии уровня $|V|^2$ для жесткого углового соединения пластин

а — $2\varphi = 0,9\pi$; б — пластины образуют прямой угол; в — $2\varphi = 0,1\pi$

Максимальная частота, при которой возможно полное отражение, зависит от угла соединения пластин следующим образом:

$$f_{\max} = \sqrt{1,5} (1 - \nu)^2 c_l / 4\pi h \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Условие полного прохождения $J_{nn} = \infty$, или $4k_l^2 \mu_l \mu_l + (\kappa_l^2 - k_l^2)^2 = 0$, является дисперсионным уравнением «рэлеевской» волны в пластине. Таким образом, полное прохождение обусловлено условием совпадения следа падающей волны с длиной «рэлеевской» волны. Незначительное отличие угла полного прохождения от угла совпадения для «рэлеевской» волны θ_r на высоких частотах обусловлено влиянием антисимметричных колебаний. На рис. 7, а для случая $2\varphi = 0,9\pi$, $c_l = 5$ км/сек, $\nu = 0,31$ нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений 0, $1/3$, $2/3$, 1. Для углов падения $\theta < \theta_r$ величина $|V|^2$ быстро уменьшается с повышением частоты. Для углов падения $\theta > \theta_r$ коэффициент отражения по энергии с повышением частоты возрастает и достигает значения 1, а затем быстро уменьшается.

Таким образом, при наличии слабых изломов пластины изгибная волна на низких частотах будет испытывать сильное рассеяние.

3. $\operatorname{tg} \varphi = 1$, $c_l = 5$ км/сек, $\nu = 0,31$. Для этого случая на рис. 7, б нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений 0, $1/3$, $2/3$, 1. Здесь определяющее влияние также оказывают симметричные колебания. Углы полного прохождения и полного отражения располагаются близко один от другого и разделяют две характерные

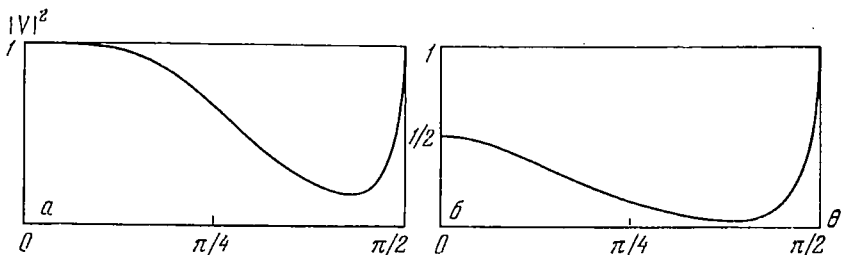


Рис. 8. Зависимость $|V|^2$ от угла падения θ

a — пластины сложены и жестко соединены; *b* — шарнирное соединение пластин, пластины полностью сложены либо раскрыты

области слабого и сильного отражения. Для углов падения $\theta < \theta_r$ коэффициент отражения по энергии с повышением частоты уменьшается, а для углов падения $\theta > \theta_r$ увеличивается.

4. $\text{tg}^2 \varphi \ll 1$. В этом случае величина $\text{tg}^2 \varphi J_{nm} \approx 0$ и коэффициент отражения для симметричных колебаний не зависит от частоты. Антисимметричные колебания определяют зависимость коэффициента V от частоты. Полное прохождение обусловлено компенсацией симметричных и антисимметричных отраженных изгибных волн. Угол полного отражения определяется уравнением

$$J_{in}/J_{io} = (C_{in} + \text{tg}^2 \varphi C_{nn})/C_{io}. \quad (4.10)$$

Угол полного отражения лежит в окрестности углов θ_r и θ_l . На рис. 7, *b* для случая $2\varphi = 0,1 \pi$, $c_l = 5$ км/сек, $\nu = 0,31$ на плоскости нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений $0, 1/3, 2/3, 1$. С повышением частоты угол полного прохождения быстро увеличивается.

5. $\text{tg} \varphi = 0$. Пластины полностью сложены. Коэффициент отражения не зависит от частоты и параметров пластины. На рис. 8, *a* приведена зависимость $|V|^2$ от угла падения. Коэффициент отражения нигде не обращается в нуль. Минимум коэффициента отражения смещен в сторону больших углов падения.

Для малых углов раскрытия пластин существует максимальный угол раскрытия φ_{\max} для каждой частоты, определяемый уравнением (4.10) при $k_y = k$, или

$$\text{tg}^2 \varphi_{\max} = (3 + \nu) \nu^2 \pi^2 / h / 4 \sqrt{6} c_l,$$

меньше которого не существует направления полного прохождения. Это объясняется тем обстоятельством, что условие полного прохождения (4.10) для $\varphi < \varphi_{\max}$ удовлетворяется при значениях $k_y > k$ и становится дисперсионным уравнением краевой волны. При $\varphi = 0$ это дисперсионное уравнение совпадает с дисперсионным уравнением изгибной краевой волны «рэлеевского» типа, исследованным в работе [19].

Таким образом, при отражении изгибной волны от углового соединения продольные и поперечные волны, возникающие при отражении, обуславливают появление направлений полного прохождения и полного отражения и сильную зависимость коэффициента отражения от частоты.

Шарнирное соединение пластин

Граничные условия для шарнирного соединения имеют вид

$$u^I(0) = u^{II}(0), \quad F^I + F^{II} = 0, \quad M^I = M^{II} = 0.$$

Отсюда получаем граничные условия при симметричных колебаниях соединения:

$$u_n^I(0) = 0, \quad F_z^I = 0, \quad F_y^I = 0, \quad M^I = 0.$$

Граничные условия для антисимметричного поля совпадают с аналогичным условием при жестком соединении (4.6).

Выделим из общего поля падающую под произвольным углом волну и отраженную волну той же амплитуды:

$$u_z(x) = A [\exp(ixx) - \exp(-ixx)].$$

Таким образом, коэффициент отражения V однородной изгибной волны и коэффициент прохождения T для шарнирного соединения примут следующий вид:

$$V = -1 + V_c + V_a, \quad T = V_c - V_a, \quad (4.11)$$

где V_c — коэффициент отражения однородной изгибной волны для симметричного поля; V_a — коэффициент отражения для антисимметричного поля. Симметричные колебания возбуждаются перерезывающей силой $F_{\text{пер}}$ падающей и выделенной волн и должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u_z^I(0) &= u_z^I(0)/\sin \varphi = u_x^I(0)/\cos \varphi, \\ F_z^I &= F_z^I \sin \varphi + F_x^I \cos \varphi - F_{\text{пер}} \sin \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для антисимметричных колебаний соответствующая система уравнений совпадает с системой уравнений (4.7) жесткого соединения. Подстановка податливостей и жесткостей полубезграничной пластины (2.9) и (2.10) в систему (4.12) приводит к следующему выражению для безразмерной амплитуды, перерезывающей силы A_c при симметричных колебаниях:

$$A_c = -F_z^I/F_{\text{пер}} = J_{II}^{-1}/[J_{II}^{-1} + (\text{tg}^2 \varphi J_{nn})^{-1}].$$

Используя теперь обозначения (4.8) и полученное выше соотношение $F_{z0}^I/F_z^I = C_{I0}I_{II}$, получим коэффициент отражения для симметричных колебаний шарнирного соединения:

$$V_c = C_{I0}/[J_{II}^{-1} + (\text{tg}^2 \varphi J_{nn})^{-1}]. \quad (4.13)$$

Выражение коэффициента отражения для антисимметричных колебаний совпадает с выражением (4.9). Подставляя полученные выражения (4.13) и (4.9) в формулу (4.11), получим окончательное выражение для коэффициента отражения однородной изгибной волны:

$$V = -1 + \frac{C_{10}}{J_{11}^{-1} + (\operatorname{tg}^2 \varphi J_{nn})^{-1}} + \frac{C_{10}}{J_{11}^{-1} + \operatorname{tg}^2 \varphi C_{nn}}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. $2\varphi = 0; \pi$. Пластины полностью раскрыты или полностью сложены. В этом случае

$$V = -(1 + C_{10}/C_{1n})^{-1}.$$

На рис. 8, б приведена зависимость $|V|^2$ от угла падения θ . Коэффициент отражения не зависит от частоты. Полного прохождения не наблюдается ни при каком угле падения, поскольку условие прозрачности в этом случае становится дисперсионным уравнением краевой изгибной волны [19], которое удовлетворяется при значениях $K_y > K$.

2. $2\varphi = \pi/10$. Пластины слегка сложены. В этом случае основную роль играют симметричные колебания. На рис. 9 для угла раскрытия $2\varphi = 0,9\pi$, $c_1 = 5 \text{ км/сек}$, $\nu = 0,31$ на плоскости нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений 0, $1/3$, $2/3$, 1. На низких частотах практически везде коэффициент отражения по энергии равен 1. На высоких частотах почти для всех углов падения величина коэффициента отражения начинает быстро уменьшаться и обращается в нуль.

3. Если пластины образуют острый угол, то линии уровня практически совпадают с линиями уровней, изображенными на рис. 9. Это совпадение наблюдается при углах раскрытия пластин, в 2 раза меньших дополнительного угла при слегка сложенных пластинах.

4. $2\varphi = \pi/2$. В этом случае практически во всем диапазоне частот и углов падения изгибная волна полностью отражается.

Таким образом, при слабо согнутых пластинах или образующих острый угол вслед за сильным отражением на низких частотах идет полоса хорошей прозрачности шарнирного соединения.

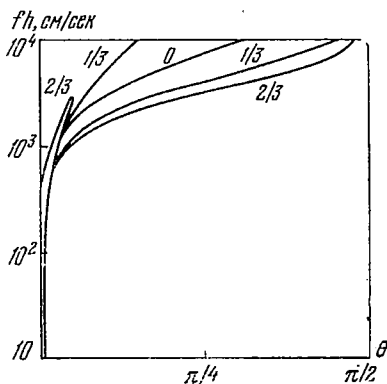


Рис. 9. Линии уровня $|V|^2$ для шарнирного соединения пластин, $2\varphi = 0,9\pi$

РЕШЕТЧАТЫЕ СТРУКТУРЫ

Глава 5

ГРУППОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЖЕСТКОСТИ

Наиболее фундаментальный результат, относящийся к решеткам, как и к любым другим линейным периодическим структурам, составляет теорема Флоке — Ляпунова [14]. Смысл ее состоит в том, что колебания двух любых соседних ячеек периодичности отличаются на постоянную величину. Это утверждение является следствием трансляционной симметрии решеток, заключающейся в неизменности структуры при сдвиге ее на расстояние, кратное размеру одной ячейки периодичности. Все существующие методы расчета периодических структур так или иначе используют теорему Флоке, так как она показывает, в каком виде следует искать решение.

Согласно теореме в одномерной периодической структуре могут существовать волны вида

$$w(x + nl) = w(x) \exp(i\mu ln), \quad (5.1)$$

где w — некоторая величина, характеризующая движение структуры, например смещение; x — текущая координата; l — размеры одной ячейки периодичности; μ — постоянная распространения; n — целое число.

Такие волны принято называть нормальными. В двумерном случае нормальные волны имеют аналогичный вид:

$$w(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = w(\mathbf{r}) \exp[i(\boldsymbol{\mu} \mathbf{l})], \quad (5.2)$$

где $\mathbf{l} = n_1 \mathbf{l}_1 + n_2 \mathbf{l}_2$; n_1 и n_2 — целые числа; \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 — два линейно независимых вектора, которые определяют трансляции, совмещающие систему (базисные векторы прямой решетки); $\boldsymbol{\mu} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2$ — вектор постоянной распространения; \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — базисные векторы обратной решетки [14]. Любое движение решетки может быть представлено как суперпозиция ее нормальных волн.

Наиболее распространенный метод расчета решеток следующий. В качестве ячейки периодичности выбирают пространство

между соседними узлами. Внутри ячейки система однородна. Поэтому первый множитель правой части соотношения (5.1) или (5.2) представляется в виде линейной комбинации нормальных волн однородной струны или стержня с неизвестными коэффициентами. Сопрягая в узле решения, относящиеся к двум соседним ячейкам, получают однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Приравнявая ее определитель нулю, получают дисперсионное уравнение, т. е. зависимость постоянной распространения от частоты. Этот метод очень удобен для расчета простых решеток, например одномерных и двумерных струнных решеток, стержня с сосредоточенными нагрузками [68], электрических линий [14] и др. Но для стержневой решетки этот метод практически непригоден, так как приводит к определителю двенадцатого порядка. Столь громоздкое дисперсионное уравнение не дает возможности провести какое-либо физическое исследование. Этим, по-видимому, и объясняется отсутствие работ, использующих этот метод для расчета сложных решеток.

Другой метод, также часто встречающийся в литературе, — матричный. Он состоит в том, что ячейку периодичности представляют в виде некоторого $4N$ -полюсника для одномерных решеток или $8N$ -полюсника для двумерных и рассматривают цепочку или сеть из этих элементов. Используя затем связь между входными и выходными величинами многополюсника, обусловленную теоремой Флоке, получают дисперсионное уравнение также в виде равенства нулю некоторого определителя. Хотя по количеству выкладок и по компактности окончательных результатов матричный метод не лучше предыдущего, он все же несколько предпочтительнее благодаря тому, что с его помощью естественно вводятся такие важные для практических приложений понятия, как характеристический импеданс. Кроме того, матричный метод удобен при конструировании фильтров с заданной частотной характеристикой, так как задача в этом случае сводится к подбору соответствующих параметров одного многополюсника. Этот метод был использован Кремером и Лейлихом в их фундаментальной работе [45] по колебаниям стержня с инерционной периодической нагрузкой. Ряд общих результатов для цепочек и сетей из многополюсников получен также П. Е. Краснушкиным [20].

Упомянутые выше методы позволяют исследовать и вынужденные колебания одномерных решеток в том случае, когда силы приложены в неоднородностях. Примеры таких расчетов для простых решеток можно найти в книге Л. Бриллюэна и М. Пароди [14], а для стержня с периодической нагрузкой это было сделано Унгаром [68]. Однако на двумерные решетки эти методы, по-видимому, не распространяются.

Большие возможности для расчета вынужденных колебаний двумерных решеток заключены в методе конечных разностей. Этот метод непосредственно примыкает к двум приведенным выше

методам и состоит в нахождении конечно-разностного уравнения решетки и последующего его решения. Таким образом почти всегда рассматриваются кристаллические решетки [42] и электрические цепочки [14]. Он может быть применен и для некоторых одномерных стержневых решеток [60]. Если уравнение получено, то решение для вынужденных колебаний легко получить, применяя к его левой и правой частям дискретное преобразование Фурье. Однако и здесь вычисления столь громоздки, что использовать этот метод в расчете, например, стержневой двумерной решетки не представляется возможным.

Существует еще несколько методов расчета решеток. Один из них — метод Уиттекера [61] — состоит в разложении в ряд Фурье периодической нагрузки и первого сомножителя правой части (5.1) или (5.2) и в последующем нахождении неизвестных коэффициентов в разложении $w(x)$ или $w(r)$. Метод приводит к бесконечным определителям и поэтому имеет в основном теоретическое значение. Однако в некоторых случаях путем соответствующего выбора начала координат удается обойти эту трудность, как это сделал, например, Вожелъ [69].

Ряд результатов для одномерных и двумерных решеток был получен с помощью метода суммирования всевозможных отраженных и прошедших через узлы волн [48, 63]. Однако для сложных решеток он оказывается также чересчур громоздким, поэтому Хекл [48], рассматривая эту задачу, ограничился весьма специальным случаем (см. главу 8).

Ни один из перечисленных методов не может привести к созданию удовлетворительной теории колебаний сложных механических решеток из-за громоздкости и неудобства записи окончательных результатов. Ниже излагается метод, который позволяет значительно облегчить расчет многих решетчатых конструкций. Благодаря понятию групповой динамической жесткости, вводимому аналогично линейной или поверхностной динамической жесткости (см. главу 1), порядок определителей в решении удалось понизить в 2 раза для одномерных решеток, в 4 раза для двумерных и в 8 раз для трехмерных. Кроме того, удалось в замкнутом виде получить функции Грина решетки и представить окончательные результаты в удобной для анализа форме.

Дисперсионное уравнение

Рассмотрим бесконечную одномерную решетку, состоящую из однородной среды и периодической сосредоточенной нагрузки, обладающей сопротивлением перерезывающей силе. Среда описывается уравнением $L[w(x)] = 0$, где L — линейный оператор, а нагрузка характеризуется динамической жесткостью C_n . Мы будем рассматривать только установившееся гармоническое движение, и множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду будет опускаться. Начало координат выберем в одном из узлов решетки.

Пусть в такой структуре распространяется волна (5.1). Тогда между средой и нагрузкой возникнут силы реакции. По теореме Флоке эти силы имеют плотности

$$f_c(x) = f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl) \exp(i\mu ln), \quad (5.3)$$

$$f_n(x) = f_n \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl) \exp(i\mu ln),$$

где $f_c(x)$ действует на среду, а $f_n(x)$ — на нагрузку. В состоянии равновесия силы реакции отсутствуют. Сумма этих сил должна быть равна нулю в каждой точке структуры и, в частности,

$$f_n + f_c = 0. \quad (5.4)$$

Распространение нормальной волны в решетке эквивалентно вынужденным колебаниям нагрузки и однородной среды в отдельности под действием сил (5.3). Движение нагрузки под действием силы с плотностью $f_n(x)$ полностью определяется ее динамической жесткостью:

$$f_n = C_n w(0). \quad (5.5)$$

Колебание однородной среды под действием силы с плотностью $f_c(x)$ может быть представлено в таком же виде. Действительно, пусть $g(x/x_0)$ — ее функция Грина. Тогда, пользуясь известной формулой для вынужденных колебаний

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x/x_0) f_c(x_0) dx_0$$

и полагая $x = 0$, получим $w(0) = I_c f_c$ или

$$f_c = C_c w(0), \quad (5.6)$$

где

$$I_c = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(0/nl) \exp(i\mu nl) \quad (5.7)$$

— величина, имеющая размерность податливости и зависящая только от постоянной распространения μ , частоты ω и параметров среды; $C_c = I_c^{-1}$. Подставив выражения (5.5) и (5.6) в равенство (5.4) и учитывая, что смещения нагрузки и среды в узлах одинаковы, получим искомое дисперсионное уравнение

$$C_n + C_c = 0, \quad (5.8)$$

устанавливающее связь между постоянной распространения μ , частотой и параметрами рассматриваемой структуры.

Определение жесткости C_c , как это видно из (5.7), отличается от общепринятого. Она представляет собой отношение сосредоточенной силы к смещению в произвольном узле решетки $x = nl$

при одновременном воздействии бесконечной группы сил. Будем называть ее групповой динамической жесткостью. Для нагрузки это определение совпадает с обычным определением жесткости, так как она сама представляется в виде бесконечного числа не связанных один с другим одинаковых двухполюсников. Для однородной бесконечной среды, например для струны или стержня, отличие значительно. Групповая жесткость не зависит от координаты nl , потому что силы реакции и смещения подчиняются соотношению Флоке (5.1). Размерность групповой жесткости *дина/см*.

Формулы для функции Грина

Для решетки в целом, как и для составных ее элементов, можно определить групповую динамическую жесткость C . С этой целью на нее нужно подействовать внешней силой с плотностью

$f(x) = f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl) \exp(i\mu ln)$. Тогда, обозначая через $G(x/y)$ неизвестную функцию Грина решетки, можно написать

$$f = C w(0), \quad (5.9)$$

где

$$C = I^{-1} \text{ и } I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(0/nl) \exp(i\mu ln). \quad (5.10)$$

Эти соотношения получаются так же, как (5.6) и (5.7).

С другой стороны, так как сумма возникших при этом внутренних сил реакции должна равняться внешней $f = f_c + f_n$, то, подставив сюда выражения (5.5) и (5.6), получим

$$f = (C_c + C_n) w(0). \quad (5.11)$$

Сравнивая соотношения (5.9) и (5.11), приходим к выводу, что групповая динамическая жесткость решетки равна сумме групповых жесткостей ее составных элементов:

$$C = C_c + C_n, \quad (5.12)$$

а дисперсионное уравнение (5.8) означает равенство нулю групповой жесткости решетки.

Пользуясь свойством (5.12) и равенством (5.10), нетрудно теперь вывести формулу для функции Грина $G(ml/pl)$ рассматриваемой структуры.

Напишем сначала равенство (5.12) в следующем виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(0/nl) \exp(i\mu ln) = 1/(C_n + C_c). \quad (5.13)$$

Так как функция $G(0/nl)$ — это смещение решетки в точке $x = 0$ при воздействии единичной силы в точке $x_0 = nl$, то очевидно, что в силу трансляционной симметрии структуры это сме-

чение не изменится, если и точку приложения силы x_0 , и точку наблюдения x сместить на одну и ту же величину ml , где m — целое число, т. е. имеет место соотношение $G(0/hl) = G(ml/ml + nl)$. С учетом этого равенство (5.13) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} G(ml/pl) \exp(i\mu lp) = \exp(i\mu lm)/(C_H + C_C). \quad (5.14)$$

После умножения левой и правой частей на $\exp(-i\mu lp)$ и интегрирования по μl в интервале $(-\pi, \pi)$ получим функцию Грина

$$G(ml/pl) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[i\mu l(m-p)]}{C_C + C_H} d\mu l. \quad (5.15)$$

При $m = p$ эта формула определяет входную податливость бесконечной решетки в одном из узлов

$$J_0 = G(0/0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu l}{C_C + C_H}. \quad (5.16)$$

Таким образом, функция Грина $G(ml/pl)$ и, как ее частный случай, входная податливость в узле бесконечной одномерной решетки выражаются в замкнутом виде через известные характеристики C_C и C_H более простых составных ее элементов. Как будет показано ниже, интегралы (5.15) и (5.16) легко берутся с помощью вычетов. Для двумерных решеток формулы для функций Грина содержат двойные интегралы (8.6), которые в отличие от одинарных не всегда удается выразить через известные функции.

Несколько сложнее вывод формулы для произвольной функции Грина $G(ml + \varepsilon_1/nl + \varepsilon_2)$, где $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq l$. Чтобы ее найти, подействуем на решетку внешней силой с плотностью $f_1(x) + f_2(x)$, где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl - \varepsilon_1) \exp(i\mu ln), \\ f_2(x) &= f_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl - \varepsilon_2) \exp(i\mu ln). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Как и при выводе формул (5.14) и (5.15), вынужденные колебания решетки под действием сил (5.17) могут быть выражены, с одной стороны, через ее функцию Грина $G(x/x_0)$:

$$\begin{aligned} w(\varepsilon_1) &= f_1 \sum_n G(\varepsilon_1/nl + \varepsilon_1) \exp(i\xi n) + f_2 \sum_n G(\varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) \exp(i\xi n), \\ w(\varepsilon_2) &= f_1 \sum_n G(\varepsilon_2/nl + \varepsilon_1) \exp(i\xi n) + f_2 \sum_n G(\varepsilon_2/nl + \varepsilon_2) \exp(i\xi n). \end{aligned} \quad (5.18)$$

С другой стороны, это решение можно получить, расчленив решетку на ее составные элементы и заменяя взаимодействие элементов силами реакции (5.3). Движение нагрузки под действием сил реакции характеризуется по-прежнему соотношением (5.5), а для однородной среды нужно рассмотреть вынужденные колебания под действием силы с плотностью $f_c(x) + f_1(x) + f_2(x)$. Используя для этого, как и раньше, функцию Грина однородной среды $g(x/x_0)$, получим

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(\varepsilon_1) \\ w(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_c \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} f_c \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(\varepsilon_1) \\ w(\varepsilon_2) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

где

$$I_{11} = \sum_n g(0/nl) \exp(i\xi n), \quad I_{12} = \sum_n g(0/nl + \varepsilon_1) \exp(i\xi n),$$

$$I_{13} = \sum_n g(0/nl + \varepsilon_2) \exp(i\xi n), \quad I_{23} = \sum_n g(\varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) \exp(i\xi n),$$

$$I_{22} = \sum_n g(\varepsilon_1/nl + \varepsilon_1) \exp(i\xi n) \text{ и т. д., } \xi = \mu l.$$

Складывая первое равенство (5.19) с равенством (5.5) и учитывая условие (5.4), а затем обращая полученную матрицу, найдем:

$$\begin{aligned} w(0) &= Y_{12}f_1 + Y_{13}f_2, & w(\varepsilon_1) &= Y_{22}f_1 + Y_{23}f_2, \\ & & w(\varepsilon_2) &= Y_{32}f_1 + Y_{33}f_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Из этих трех равенств два последних представляют решение (5.18), выраженное через известные характеристики составных элементов решетки:

$$Y_{12} = \frac{I_{12}}{1 + C_H I_{11}}, \quad Y_{22} = \frac{I_{32} + C_H (I_{11} I_{22} - I_{12} I_{21})}{1 + C_H I_{11}},$$

$$Y_{23} = \frac{I_{23} + C_H (I_{11} I_{23} - I_{21} I_{13})}{1 + C_H I_{11}}.$$

Приравнявая коэффициенты при f_2 в уравнениях (5.18) и (5.20), приходим к искомой функции Грина решетки

$$G(ml + \varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{23} \exp[i\xi(n-m)] d\xi. \quad (5.21)$$

Приравнивая затем коэффициенты при f_1 , получим входную податливость решетки в произвольной точке

$$J_0(\varepsilon_1) = G(\varepsilon_1/\varepsilon_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{22} d\xi. \quad (5.22)$$

Последняя формула, впрочем, может быть получена непосредственно из общей формулы (5.21).

Интегралы (5.21) и (5.22), как и интегралы (5.15) и (5.16), для одномерных решеток легко берутся с помощью теории вычетов. Отметим, что в знаменателе подынтегральных выражений в формулах (5.15), (5.16), (5.21) и (5.22) стоит левая часть дисперсионного уравнения (5.8). Отсюда следует, что функция Грина решетки состоит из столькох слагаемых, сколько в ней существует нормальных волн, а входная податливость может быть представлена как сумма податливостей, определенных для каждой из нормальных волн в отдельности.

Функция Грина (5.21) позволяет рассчитывать вынужденные колебания решетки под действием внешней силы с произвольной плотностью $q(x_0)$. На основе принципа суперпозиции имеем

$$\begin{aligned} w(ml + \varepsilon_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(ml + \varepsilon_1/x_0) q(x_0) dx_0 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^l G(ml + \varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) q(nl + \varepsilon_2) d\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Подставив в эту формулу значение функции Грина (5.21), получим

$$w(ml + \varepsilon_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi m) d\xi \int_0^l Y_{23} Q^*(\xi, \varepsilon_2) d\varepsilon_2, \quad (5.24)$$

где

$$Q^*(\xi, \varepsilon_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(nl + \varepsilon_2) \exp(-i\xi n).$$

Операция, записанная в виде последней формулы, называется дискретным преобразованием Фурье смещенной функции $q(nl)$. Формулы (5.10), (5.13), (5.17), а также формулы для Y_{23} показывают, что групповые податливости представляют собой дискретное преобразование Фурье от соответствующих функций Грина. Именно благодаря этому свойству групповых податливостей удалось найти формулы (5.15) и (5.21), которые по существу производят обратное дискретное преобразование Фурье. Формула (5.24) представляет отклик решетки на внешнее воздействие через дискретные преобразования от функции Грина и функции плотности

внешней силы. По своей структуре она очень похожа на формулу, выражающую отклик непрерывной среды на внешнее воздействие через спектральные плотности функции Грина этой среды и функции плотности силы.

Выведем формулу, описывающую вынужденные колебания решетки в терминах обычного преобразования Фурье. Для этого нужно найти функцию $F(\mu)$, определяемую равенством

$$G(ml + \varepsilon_1/x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \exp(-i\mu x_0) d\mu,$$

и затем подставить ее в формулу (5.24). В результате получим

$$w(ml + \varepsilon_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) Q(\mu) d\mu, \quad (5.25)$$

где $Q(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x_0) \exp(-i\mu x_0) dx_0$ — изображение Фурье от функции плотности силы $q(x_0)$ в обычном смысле. Функция $F(\mu)$ может быть определена следующим образом.

Равенство $\sum_n G(\varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) \exp(i\xi n) = Y_{23}$ переписывается сначала в виде $\sum_n G(ml + \varepsilon_1/pl + \varepsilon_2) \exp(i\xi p) = Y_{23} \exp(i\xi m)$. Затем обе его части умножаются на $\exp(i\mu \varepsilon_2)$ и интегрируются в интервале $[0, l]$. Тогда левая часть будет равна $F(\mu)$

$$F(\mu) = \exp(i\xi m) \int_0^l Y_{23} \exp(i\mu \varepsilon_2) d\varepsilon_2. \quad (5.26)$$

Эта формула устанавливает связь между обычным преобразованием Фурье и дискретным.

Таким образом, для вынужденных колебаний решетки под действием внешней силы с плотностью $q(x_0)$ выведены три формулы — (5.23), (5.24) и (5.25). В зависимости от вида функции $q(x_0)$ одна из них оказывается удобнее других. Так, если на решетку действуют сосредоточенные силы, удобнее воспользоваться непосредственно формулой (5.23). Если внешняя сила состоит из нескольких пространственных гармоник, то лучше всего использовать формулу (5.25). Например, если сила состоит только из одной такой гармоники, т. е. ее плотность $q(x_0) = Q_0 \exp(i\mu_0 x_0)$, то $Q(\mu) = 2\pi Q_0 \delta(\mu_0 - \mu)$ и формула (5.25) дает простое выражение для отклика решетки $w(ml + \varepsilon_2) = Q_0 F(\mu_0)$, где $F(\mu_0)$ вычисляется по формуле (5.26). В случае произвольной внешней силы, по-видимому, удобнее пользоваться формулой (5.24).

Простой пример. Проиллюстрируем описанный выше метод расчета на простой решетке-струне с периодической сосредото-

ченной нагрузкой. Эта решетка эквивалентна по своим колебательным свойствам длинной электрической линии, нагруженной в периодически расположенных точках двухполюсниками. В литературе [14] известно ее дисперсионное уравнение и входной импеданс в узле. Ниже будут приведены формулы для определения входной динамической жесткости в произвольной точке, функции Грина и ее дискретного и обычного преобразования Фурье.

Пусть струна имеет натяжение T и волновое число k , нагрузка характеризуется динамической жесткостью C_H , интервал периодичности равен l и, кроме того, $kl = \sigma$, $\mu l = \xi$.

Пользуясь функцией Грина однородной бесконечной струны $g(x/x_0) = (i/2kT) \exp(ik|x - x_0|)$, по формуле (5.10) вычисляем групповую жесткость струны $C_G = 2kT(\cos \sigma - \cos \xi)/\sin \sigma$. Тогда дисперсионное уравнение (5.8) можно записать в следующем виде:

$$\cos \sigma + C_H^* \sin \sigma - \cos \xi = 0, \quad (5.27)$$

где $C_H^* = C_H/2kT$. Это уравнение первого порядка относительно $\cos \xi$, и поэтому в рассматриваемой структуре независимо от нагрузки C_H всегда существует только одна нормальная волна. То обстоятельство, что постоянная распространения входит в уравнение (5.27) как аргумент функции косинуса, есть следствие того, что колебания рассматриваются только в дискретных точках $x = nl$ и заполнение пробелов между этими точками неоднозначно $\xi = a + 2\pi m$. Число m нужно выбирать так, чтобы при переходе к однородной струне, т. е. при $C_H \rightarrow 0$, дисперсионная кривая $\mu(a)$ переходила в кривую дисперсии однородной струны $k(\omega)$. Это относится и к другим периодическим структурам. Подробно о предельном переходе см. работу [14].

Чтобы получить необходимые формулы для вынужденных колебаний, достаточно вычислить подынтегральное выражение в формулах (5.21) и (5.22). Оно оказывается равным

$$Y_{23} = \frac{1}{2kT} \cdot \frac{1}{\cos a - \cos \xi} \times \quad (5.28)$$

$$\times \begin{cases} \sin[\sigma - k(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + 2C_H^* \sin k\varepsilon_2 - \sin(\sigma - k\varepsilon_1) + e^{i\xi} \sin k(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \quad \text{при } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2, \\ \sin[\sigma - k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] + 2C_H^* \sin k\varepsilon_1 - \sin(\sigma - k\varepsilon_2) + e^{-i\xi} \sin k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \\ \quad \text{при } \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1, \end{cases}$$

где $a = 2\pi m + \arccos(\cos \sigma + C_H^* \sin \sigma)$ — решение дисперсионного уравнения (5.27). Полагая в этой формуле $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и подставляя в интеграл (5.21), получим входную податливость в узле

$$J(0) = i \sin \sigma / 2kT \sin a. \quad (5.29)$$

Продельвая ту же операцию для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, получим входную податливость в произвольной точке

$$J(\varepsilon) = J(0) \left[1 + C_n^* \frac{\sin k\varepsilon \sin(\sigma - k\varepsilon)}{\sin \sigma} \right]. \quad (5.30)$$

Она отличается от податливости в узле множителем, не зависящим от постоянной распространения. Этот множитель велик вблизи резонансных частот ($\sigma = \pi$) закрепленного с обеих сторон отрезка струны длиной l , так как в этом случае нагрузки находятся в узлах резонансной формы, а сила приложения — в точке между

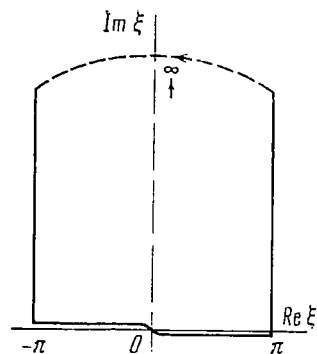


Рис. 10. Контур интегрирования для вычисления функции Грина одномерной решетки

нагрузками. Если целое число полуволи укладывается в промежутке ε или $l - \varepsilon$, то $J(\varepsilon) = J(0)$. На этих частотах точки $x = 0$ и ε находятся в узлах резонансной формы и, следовательно, связаны абсолютно жесткой связью, не допускающей различия амплитуд в этих двух точках.

Формулу (5.30) можно представить в более удобном виде

$$J(0) = J(\varepsilon) J_n / (J_n + J_0),$$

где $J_n = C_n^{-1}$, а $J_0 = (1/kT) \sin k\varepsilon \sin(\sigma - k\varepsilon) / \sin \sigma$ — это входная податливость в точке $x = \varepsilon$ отрезка струны длиной l , закрепленного с обеих сторон. Отсюда следует, что если $J(0)$ пропорциональна податливости J_n , то $J(\varepsilon)$ пропорциональна податливости параллельного соединения J_n и J_0 с тем же коэффициентом пропорциональности. При этом J_n определяется только нагрузкой, а J_0 — одной струной.

Чтобы вычислить функцию Грина в явном виде, выражение (5.28) нужно подставить в формулу (5.21) и проинтегрировать по ξ . Интегрирование удобнее всего проводить с помощью теории вычетов. Контур интегрирования для $m \geq 0$ показан на рис. 10. Интеграл по отрезку $(-\pi + i\infty, \pi + i\infty)$ равен нулю, так как подынтегральная функция убывает в направлении мнимой оси ξ как $\text{ch}^{-1} |\xi|$; интегралы по двум полубесконечным прямым $(-\pi + i\infty, -\pi)$ и $(\pi, \pi + i\infty)$ равны и противоположны по знаку в силу периодичности Y_{23} . Так что интеграл по контуру (см. рис. 10) равен интегралу по отрезку $[-\pi, \pi]$, а с другой стороны, он равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов в точках, являющихся полюсами функции Y_{23} и лежащих внутри контура интегрирования. При этом если корень a уравнения (5.27) действителен, то из двух полюсов $\xi = \pm a$, лежащих на контуре, будем считать, в соответствии с принципом излучения, корень $\xi = +a$ принадлежащим контуру интегрирования, а $\xi = -a$

лежащим вне контура. В самом деле, если в систему ввести небольшое затухание, можно показать, что корень $\xi = a$ сместится вверх (внутри контура), а $\xi = -a$ — вниз за его пределы. Таким образом, во всех случаях в контур, изображенный на рис. 10, попадает только один корень дисперсионного уравнения (5.27). Отметим, что если в формуле (5.21) $m < 0$, то в качестве контура интегрирования нужно брать контур, являющийся зеркальным отражением контура C относительно оси $\text{Re } \xi$. Этим способом были получены выражения (5.29) и (5.30). Таким же образом получается и следующее выражение для функции Грина ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$):

$$G_i(ml + \varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) = i \exp[ia(m - n)] \times \\ \times \{\sin[\sigma - k(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + 2C_H^* \sin k\varepsilon_2 \sin(\sigma - k\varepsilon_1) + \\ + \exp(ia) \sin k(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\} / 2kT \sin a. \quad (5.31)$$

При $C_H = 0$ оно переходит в выражение для функции Грина однородной струны $G(ml + \varepsilon_1/nl + \varepsilon_2) = (i/2kT) \exp[ik(ml + \varepsilon_1 - nl - \varepsilon_2)]$. Приведем еще формулу для изображения Фурье в обычном смысле функции Грина, рассматривая ее как функцию от координаты точки приложения силы $y = nl + \varepsilon_2$. Она получается непосредственно из формулы (5.26)

$$F(\mu) = \frac{1}{T} \frac{\exp(i\mu\varepsilon_1) (\cos a - \cos \xi) - C_H^* [\exp(i\xi) \sin k\varepsilon_1 + \sin k(l - \varepsilon_1)]}{(\mu^2 - k^2) (\cos a - \cos \xi)} \times \\ \times \exp(i\xi m). \quad (5.32)$$

Эта функция имеет бесконечное множество полюсов $\mu = (\pm a + 2\pi r)/l$, являющихся решением дисперсионного уравнения. Точки $\mu = \pm k$ не являются полюсами, так как числитель в этих точках также обращается в нуль. При $C_H = 0$ функция стремится к спектральной плотности функции Грина однородной струны:

$$F(\mu) = \exp[i\mu(ml + \varepsilon_1)] / T(\mu^2 - k^2).$$

Формулы (5.28), (5.31) и (5.32) дают полное решение задачи о вынужденных колебаниях струны с периодической сосредоточенной нагрузкой под действием произвольных внешних сил.

ОДНОМЕРНАЯ СТЕРЖНЕВАЯ РЕШЕТКА

В этой главе будут рассмотрены изгибные колебания бесконечного стержня с периодическими сосредоточенными препятствиями (нагрузками). В главе 5 отмечалось, что попытки рассмотреть колебания этой структуры разными методами предпринимались различными авторами. Первым, кто получил ее дисперсионное уравнение, был, по-видимому, Вожель [69]. Он, однако, не привел в своей работе какого-либо физического анализа уравнения. Кремер и Лейлих [45] подвергли фундаментальному исследованию стержень с периодической инерционной нагрузкой, обладающей сопротивлением перерезывающей силе и моменту сил. Они не только получили общее дисперсионное уравнение, но и проанализировали характер распространения волн во многих частных случаях. Наиболее важными их результатами являются наличие двух нормальных волн в неоднородном стержне и чередование полос пропускания и непропускания в его частотной характеристике. Они построили дисперсионные кривые обеих нормальных волн в предельных случаях бесконечного сопротивления нагрузки силе и моменту сил, а также для некоторых конкретных значений инерционной нагрузки.

Частный случай нагрузки с нулевым сопротивлением моменту сил и бесконечным сопротивлением перерезывающей силе представляет собой периодически опертый стержень. Эта структура является простейшей одномерной моделью широко распространенной конструкции — пластины с периодическими ребрами жесткости — и привлекла наибольшее внимание исследователей [57, 60, 65]. Была подробно изучена дисперсия нормальной волны (в периодически опертом стержне она единственна), найден графический способ нахождения собственных частот конечного стержня и качественно исследовано возбуждение конструкции внешним акустическим полем. Эти работы являются частью целого цикла исследований по колебаниям ребристых пластин типа фюзеляжа самолета [43, 51—59, 65, 66].

Простые формулы расчета дисперсии высокочастотных нормальных волн получены в работах [63, 67]. Эти формулы верны, когда расстояние между нагрузками велико по сравнению с длиной изгибной волны ненагруженного стержня и неоднородная волна, возникшая вблизи какой-либо нагрузки, практически исчезает на расстоянии, равном размеру ячейки периодичности.

Некоторые формулы для вынужденных колебаний получены в работах [61, 68]. В первой из них приведены выражения для входной податливости в узле и для отклика неоднородного стержня на действие бесконечной системы сил, одинаковых по амплитуде, сосредоточенных в узлах и отличающихся одна от другой постоянным сдвигом фазы. Во второй найдена функция Грина в виде разложения в бесконечный ряд.

Дисперсионное уравнение

При выводе дисперсионного уравнения следует иметь в виду, что взаимодействие стержня и нагрузки, симметричной относительно нейтральной оси стержня, характеризуется перерезывающими силами и моментами сил реакции. Поэтому в отличие от одномерной струнной решетки (см. главу 5) нагрузка обладает кроме обычной жесткости C_f еще жесткостью к повороту C_m :

$$\begin{bmatrix} F_H \\ M_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f & 0 \\ 0 & C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ \alpha(0) \end{bmatrix},$$

где M_H — амплитуда момента сил реакции, действующего на нагрузку, и α — угол поворота. Соответственно и однородный стержень будет иметь не просто групповые жесткость и податливость, а матрицу второго порядка групповых податливостей и жесткостей. Если

$$g(x/y) = (4Bk^3)^{-1} [i \exp(ik|x-y|) - \exp(-k|x-y|)]$$

— функция Грина однородного стержня, где B — его жесткость на изгиб и k — волновое число, то для стержня имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ \alpha(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I_y' \\ I_x' & I_{xy}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_c \\ M_c \end{bmatrix},$$

или после обращения

$$\begin{bmatrix} F_c \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ \alpha(0) \end{bmatrix}.$$

Групповые податливости при этом оказываются равными

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(0/nl) \exp(i\xi n) = \frac{1}{4Bk^3} \left(\frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \xi} - \frac{\text{sh } \sigma}{\text{ch } \sigma - \cos \xi} \right),$$

$$I_y' = -I_x' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_y'(0/nl) \exp(i\xi n) = \frac{i \sin \xi}{4Bk^2} \left(\frac{1}{\cos \sigma - \cos \xi} - \frac{1}{\text{ch } \sigma - \cos \xi} \right),$$

$$I_{xy}'' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{xy}''(0/nl) \exp(i\xi n) = \frac{1}{4Bk} \left(\frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \xi} - \frac{\text{sh } \sigma}{\text{ch } \sigma - \cos \xi} \right), \quad (6.1)$$

где штрихи около функции g означают производную, $\xi = \mu l$ и $\sigma = kl$. Матрица групповых жесткостей неоднородного стержня равна сумме этих матриц для нагрузки и однородного стержня. Таким образом, дисперсионное уравнение записывается так:

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_f & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} + C_m \end{bmatrix} = 0,$$

или после несложных преобразований

$$\Delta = 1 + C_f I + C_m I''_{xy} + C_f C_m \Delta = 0, \quad (6.2)$$

где

$$\Delta = II''_{xy} - I_x I'_y = \frac{1}{8B^2 k^4} \cdot \frac{1 - \cos \sigma \operatorname{ch} \sigma}{(\cos \sigma - \cos \xi)(\operatorname{ch} \sigma - \cos \xi)}.$$

Уравнение (6.2) — квадратное относительно $\cos \xi$. При любых нагрузках в структуре существуют две нормальные волны с частотой ω и постоянными распространения μ_1 и μ_2 . При $C_f = C_m = 0$ уравнение распадается на два: $\cos \xi_1 = \cos \sigma$ и $\cos \xi_2 = \operatorname{ch} \sigma$, и две решетчатые волны переходят в две нормальные волны однородного стержня.

Графическое исследование одного частного случая

Здесь приводится пример исследования дисперсионного уравнения (6.2) в частном случае нулевой нагрузки для момента сил $C_m = 0$:

$$\Delta = \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \xi} - \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \xi} + \frac{4Bk^3}{C_f} = 0. \quad (6.3)$$

В зависимости от нагрузки и частоты постоянная распространения μ может принимать действительные, комплексные или мнимые значения. На рис. 11 каждому типу μ соответствуют определенные области. Границами между областями являются кривые (6.3), для которых $\cos \xi = \pm 1$

$$-4Bk^3/C_f = -\operatorname{ctg} \sigma/2 - \operatorname{cth} \sigma/2, \quad -4Bk^3/C_f = \operatorname{tg} \sigma/2 - \operatorname{th} \sigma/2, \quad (6.4)$$

и их асимптоты $\sigma = \pi n$, $n = 0, 1, 2 \dots$. На рис. 11 эти кривые отмечены числами 0 и π . Между ними расположены области пропускания, т. е. области, в которых одно из значений ξ действительно, $|\cos \mu l| < 1$. В этих областях проходят кривые для различных действительных значений μl . Штрихпунктирные кривые на рис. 11 — это огибающие линии уровня μ . Они также являются граничными. Уравнения огибающих

$$-4Bk^3/C_f = (\sqrt{\sin \sigma} \pm \sqrt{\operatorname{sh} \sigma})^2 / (\cos \sigma - \operatorname{ch} \sigma)$$

находятся из системы двух уравнений $\Delta = 0$ и $d\Delta/d(\cos \xi) = 0$ после исключения из них $\cos \xi$. На рис. 11, а буквами α , β , γ и δ указано, какие типы волн могут существовать в той или иной области, причем α соответствует распространяющейся волне $\exp(i\mu_2 nl)$, β — неоднородной $\exp(-\mu_1 nl)$, γ — волне типа $(-1)^n \exp(-\mu_1 nl)$ и δ — затухающей волне $\exp[(-\mu_1 + i\mu_2)nl]$, где μ_1 и μ_2 положительны. Например, $\alpha\beta$ означает, что в данной области могут возникнуть лишь два типа волн — распространяющаяся $\exp(i\mu_2 nl)$ и неоднородная $\exp(-\mu_1 nl)$. Конкретному значению нагрузки C_f на рис. 11 соответствует некоторая кривая

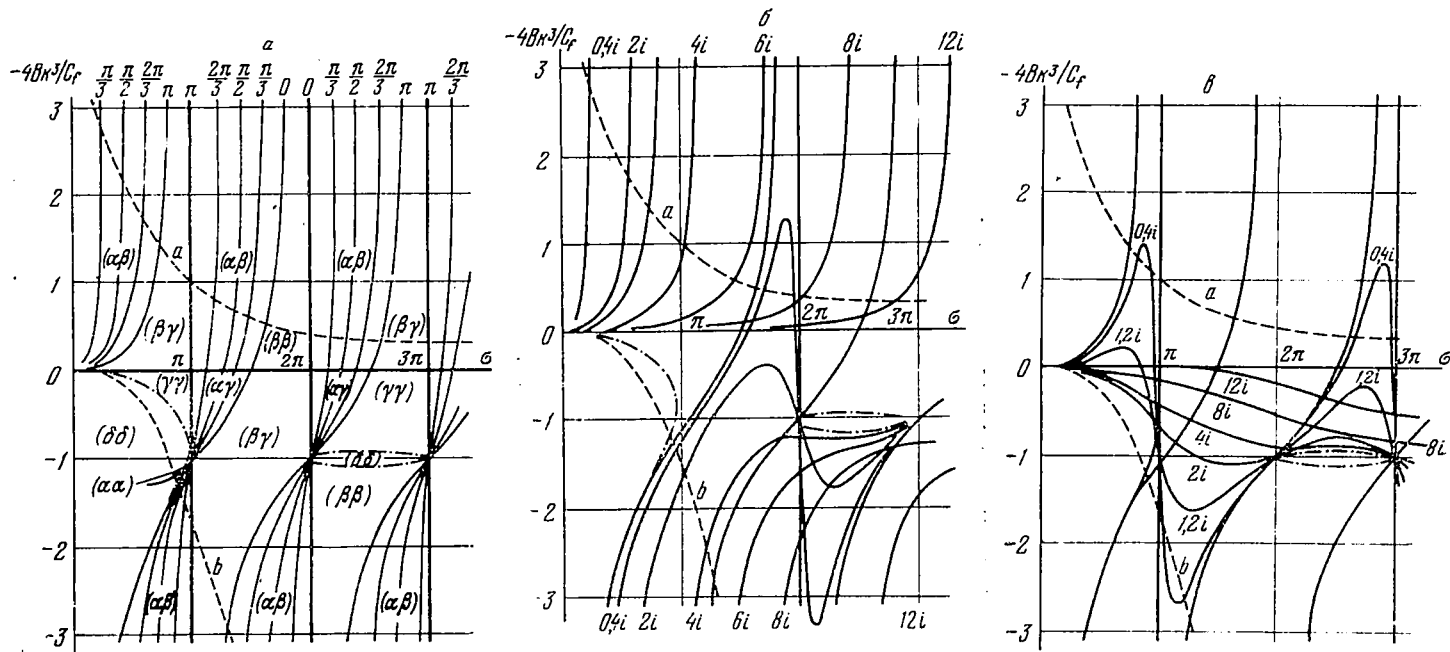


Рис. 11. Линии постоянного уровня

а — действительных значений $\xi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$; б — мнимых значений $\xi = 0 + 12i$; в — комплексных значений $\xi = \pi + i\eta$

$-4Bk^3/C_f = f(\sigma)$, проходящая через различные области и пересекающая уровни действительных значений μ . Начертив эту кривую, можно качественно определить характер распространения в любом частотном диапазоне и построить приближенную дисперсионную кривую $\mu(k)$.

Пусть, например, нагрузкой является сосредоточенная масса M . Тогда $C_f = -\omega^2 M$ и $-4Bk^3/C_f = (4m/M)/\sigma$, где m — масса отрезка стержня длиной l . Эта кривая для $4m/M = 1$ обозначена на рис. 11 буквой a . Она начинается в области пропускания. На низких частотах могут существовать две волны — $\exp(-\mu_1 nl)$ и $\exp(i\mu_2 nl)$. Затем распространяющаяся волна становится неоднородной $(-1)^n \exp(\mu_1 nl)$. Это полоса непропускания. При дальнейшем повышении частоты следуют чередующиеся полосы пропускания и непропускания. Левые границы полос пропускания $\mu l = \pi n$ являются собственными частотами опертого стержня длиной l ; на этих частотах массы неподвижны. Правые границы представляют собой решения уравнений (6.4). Первое соответствует собственным частотам отрезка стержня длиной l и массой M в середине и с граничными условиями $\alpha = \omega''' = 0$ на концах. Все нагрузки движутся в фазе. Решениями второго уравнения являются собственные частоты такого же отрезка стержня, но опертого по краям. Соседние нагрузки колеблются в противофазе. Кривая $\mu(k)$ для массовой нагрузки аналогична дисперсионной кривой электрической линии, нагруженной индуктивностями [14], с той разницей, что для линии с увеличением частоты полосы пропускания сужаются и исчезают, тогда как для стержня их ширина стремится к конечному пределу (см. рис. 11).

Для упругой нагрузки $C_f = C$ и $-4Bk^3/C_f = -(4B/Cl^3)\sigma^3$. Ей на рис. 11 соответствует пунктирная кривая b , для которой $4B/Cl^3 = 0,04$. На низких частотах ($kl \ll 1$) конструкция ведет себя как балка на сплошном упругом основании и оба корня μ_1 и μ_2 комплексны (область $\delta\delta$). При повышении частоты комплексные корни переходят в два действительных ($\alpha\alpha$). На границе областей $\delta\delta$ и $\alpha\alpha$, т. е. при пересечении кривой и огибающей, μ_1 и μ_2 действительны и одинаковы. Обе волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями. Групповые скорости, однако, различны. Характерной особенностью области $\alpha\alpha$ является то, что для одной волны знаки фазовой и групповой скоростей совпадают, для другой они противоположны. При дальнейшем повышении частоты следуют чередующиеся полосы пропускания и непропускания. Полосы непропускания сужаются и пропадают, так как на высоких частотах упругие нагрузки оказывают незначительное влияние на колебания стержня. Как и для массовой нагрузки, границы полос определяются из уравнений (6.4), т. е. являются резонансными частотами одной ячейки периодичности. Дисперсионная кривая стержня с периодической упругой нагрузкой аналогична дисперсионной кривой длиной элект-

рической линии, периодически нагруженной емкостями [14], и отличается от нее тем, что в области $\alpha\alpha$ имеет две ветви.

На рис. 11, б и в тонкими линиями начерчены линии (6.3) для мнимых и некоторых комплексных значений $\mu l = \xi$.

На рис. 11, б значения ξ чисто мнимые ($\cos \xi > 1$), а на рис. 11, в — комплексные $\xi = \pi + iA$ ($\cos \xi < -1$). На рис. 11, в указана только мнимая часть $iIm \xi = iA$. Построив кривую нагрузки $f(\sigma)$ и на этих графиках, мы можем определить величину затухания нормальных волн во всем интересующем нас частотном диапазоне.

С помощью рис. 11 можно не только представить себе картину распространения волн по стержню с любой нагрузкой C_f , но также решать более сложные задачи. Предположим, что нужно создать механический фильтр с определенной частотной характеристикой. Если в качестве такого фильтра используется стержень с нагрузкой, то из графиков сразу видно, какая при этом должна использоваться нагрузка. Если фильтр должен задерживать низкочастотные колебания, то нагрузка должна быть упругой. Если, наоборот, фильтр должен гасить вибрации в некоторых полосах средне- или высокочастотного диапазона, следует брать массовую нагрузку. Из графиков можно получить при этом соотношение масс отрезка стержня и нагрузки, если известна частота среза фильтра, т. е. нижняя граница первой полосы непропускания. Чтобы получить фильтр с заданной частотной характеристикой, нужно начертить подходящую кривую нагрузки $f(\sigma)$ на рис. 11 и затем путем комбинации из упругих, массовых или других элементов сконструировать нагрузку, которая бы наилучшим образом соответствовала этой кривой.

Отметим, что проведенный здесь анализ дисперсионного уравнения удобен и для других случаев, например для случая опертого стержня с нулевыми нагрузками моменту сил, рассмотренного в [57]. Дисперсионное уравнение получается из (6.2), если положить в нем $C_f = \infty$:

$$I + C_m \Delta = 0.$$

Подобное же общее исследование можно также проводить и для общего дисперсионного уравнения (6.2), которое удобно переписать в следующем виде:

$$(1 + C_f I)(1 + C_m I''_{xy}) - C_f C_m I'_x I'_y = 0. \quad (6.5)$$

Для этого в безразмерном пространстве $(\sigma, -4Bk^3/C_f, -4BI/C_m)$ нужно провести граничные поверхности $\cos \xi = \pm 1$. Последний член в уравнении (6.5) обращается в нуль, так как при $\xi = \pi n$ $I'_x = I'_y = 0$, и уравнения этих поверхностей будут $1 + C_f I = 0$ и $1 + C_m I''_{xy} = 0$. Это цилиндрические поверхности, параллельные осям $-4Bk^3/C_f, -4BI/C_m$. Вместе с огибающими поверхностями уровня μ они разбивают все пространство на

области различных типов μ . Нагрузкам C_f и C_m соответствует кривая в пространстве, проходящая через эти области и пересекающая поверхности уровней μ . Таким образом, исследование полностью аналогично только что проведенному.

Формулы для вынужденных колебаний

Перейдем к вынужденным колебаниям неоднородного стержня. Пусть сначала внешние силы будут приложены только в узлах и также в узлах ищутся отклики. В этом случае для расчета вынужденных колебаний нужно знать четыре функции Грина, т. е. матрицу второго порядка функций Грина, определяемую равенством

$$\begin{bmatrix} w(nl) \\ \alpha(nl) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(ml) \\ M_0(ml) \end{bmatrix},$$

где $F_0(ml)$ и $M_0(ml)$ — сила и момент силы, сосредоточенные в узле $y = ml$. Необходимо знать четыре функции, так как по смещению w в дискретной точке $x = nl$ нельзя однозначно определить угол поворота $\alpha(nl)$. В то же время величину $\alpha(nl)$ вычислить необходимо, так как вместе с моментом $M(nl)$ она определяет независимый механизм передачи энергии по структуре. Формулы этих четырех функций получаются аналогично формуле (5.15):

$$\begin{aligned} G_{11}(ml/nl) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I + C_m^* \Delta}{\Lambda} \exp[i\xi(m-n)] d\xi, \\ G_{12}(ml/nl) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I'_x}{\Lambda} \exp[i\xi(m-n)] d\xi, \\ G_{21}(ml/nl) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I'_y}{\Lambda} \exp[i\xi(m-n)] d\xi, \\ G_{22}(ml/nl) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I''_{xy} + C_f^* \Delta}{\Lambda} \exp[i\xi(m-n)] d\xi, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $C_f^* = C_f/4Bk^3$ и $C_m^* = C_m/4Bk$ — безразмерные величины.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания неоднородного стержня под действием произвольных внешних сил. Для простоты ограничимся откликами в узлах и нагрузкой, для которой $C_m = 0$. В этом случае нужно вычислять две функции Грина: одну для смещений, другую для углов поворота. Мы приведем формулу для смещений, как наиболее важную в практических приложениях. Она получается из соотношений (5.20), в которых силу

$f_2(x)$ следует положить равной нулю:

$$G(ml/nl + \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{12} \exp [i(m-n)\xi] d\xi,$$

$$J_0(\varepsilon) = G(\varepsilon/\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{22} d\xi, \quad (6.7)$$

где

$$Y_{12} = I_{12}(1 + C_H I_{11}), \quad Y_{22} = (I_{22} + C_H \Delta)/(1 + C_H I_{11}),$$

$$I_{11} = I_{22} = I, \quad \Delta = I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21},$$

$$I_{12} = \frac{1}{4Bk^3} \left[\frac{\sin(\sigma - k\varepsilon) + \exp(-i\xi) \sin k\varepsilon}{\cos \sigma - \cos \xi} - \frac{\operatorname{sh}(\sigma - k\varepsilon) + \exp(-i\xi) \operatorname{sh} k\varepsilon}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \xi} \right],$$

$$I_{21} = \frac{1}{4Bk^3} \left[\frac{\sin(\sigma - k\varepsilon) + \exp(i\xi) \sin k\varepsilon}{\cos \sigma - \cos \xi} - \frac{\operatorname{sh}(\sigma - k\varepsilon) + \exp(i\xi) \operatorname{sh} k\varepsilon}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \xi} \right]. \quad (6.8)$$

Интегралы (6.6), (6.7) берутся с помощью теории вычетов. Контур интегрирования изображен на рис. 10. Вся операция взятия интеграла полностью аналогична описанной в предыдущей главе с той лишь разницей, что в данном случае в контур интегрирования всегда попадают два корня дисперсионного уравнения.

Изображение Фурье $F(\mu)$ функции Грина (6.7) получаем из (5.26) и (6.8):

$$F(\mu) = \frac{1}{B} \cdot \frac{\exp(i\mu l m)}{(\mu^4 - k^4)(1 + C_f I)}. \quad (6.9)$$

Эта функция имеет бесконечное множество полюсов, являющихся корнями дисперсионного уравнения $1 + C_f I = 0$. Точки же, удовлетворяющие уравнению $\mu^4 - k^4 = 0$, не являются полюсами. Это становится очевидным, если вместо величины I подставить ее значение [см. (6.1)].

Пусть на неоднородный стержень действует сила с плотностью $q(x_0) = Q_0 \exp(i\mu_0 x_0)$. Тогда смещения узлов происходят согласно формуле [см. (5.25)]

$$w(ml) = Q_0 F(\mu_0). \quad (6.10)$$

Практически такой случай реализуется при возбуждении ребристой пластины плоской волной, падающей на нее из окружающей среды перпендикулярно к ребрам и под некоторым углом к самой пластине. Из формул (6.9) и (6.10) видно, что как только длина следа падающей волны совпадает с длиной нормальной волны, когда μ_0 является корнем дисперсионного уравнения, наступает резонанс и амплитуда колебаний пластин безгранично возрастает (мы предполагали, что затухания в системе нет). В тех случаях, когда скорость распространения нормальных волн больше скоро-

сти звука в среде, для любой частоты, лежащей в полосе пропускания пластины, всегда найдется такой угол падения возмущающей волны, которому соответствует резонанс. В полосах непропускания, наоборот, пластина возбуждается плохо, так как ее нормальные волны — неоднородные и не могут совпадать по форме с падающей волной.

Входная податливость стержня с массами

Рассмотрим еще входную податливость $J_0(\varepsilon)$ конкретной структуры. Пусть нагрузкой к стержню будут шарнирно укрепленные на нем массы M , в $4/\pi$ раз превышающие массу отрезка стержня длиной l . Для такой нагрузки $C_m = 0$. Величина $J_0(\varepsilon)$ вычисляется с помощью интеграла (6.7), который можно переписать в следующем виде:

$$J_0(\varepsilon) = \frac{1}{4Bk^3} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(a \cos \xi + b) d\xi}{\cos^2 \xi - P \cos \xi + Q},$$

где

$$a = d + C_f^* e; \quad b = c + C_f^* f; \quad c = \operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma;$$

$$d = \sin \sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma \cos \sigma;$$

$$e/2 = -\sin \sigma \operatorname{sh} \sigma + \sin(\sigma - k\varepsilon) \operatorname{sh}(\sigma - k\varepsilon) + \sin k\varepsilon \operatorname{sh} k\varepsilon + \\ + \sin k\varepsilon \sin(\sigma - k\varepsilon) \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} k\varepsilon \operatorname{sh}(\sigma - k\varepsilon) \cos \sigma;$$

$$f/2 = \sin(\sigma - k\varepsilon) \operatorname{sh} k\varepsilon - \sin k\varepsilon \sin(\sigma - k\varepsilon) - \operatorname{sh} k\varepsilon \operatorname{sh}(\sigma - k\varepsilon) + \\ + \sin k\varepsilon \operatorname{sh}(\sigma - k\varepsilon);$$

$$P = \operatorname{ch} \sigma + \cos \sigma - C_f^* c; \quad Q = \operatorname{ch} \sigma \cos \sigma + C_f^* d.$$

Вычисляя этот интеграл с помощью теории вычетов, получим

$$J(\varepsilon) = -\frac{i}{4Bk^3} \sum_{n=1}^2 \frac{a \cos \xi_n + b}{(2 \cos \xi_n - P) \sin \xi_n} = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon),$$

где J_1 и J_2 — амплитуды нормальных волн в месте приложения силы.

На рис. 12,а изображены значения корней дисперсионного уравнения ξ_1 и ξ_2 , а на рис. 12,б и в — соответствующие им слагаемые J_1 и J_2 общей податливости $J(\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0$ и для $\varepsilon = l/2$. Как видно из рис. 12,а, постоянная распространения первой нормальной волны есть чисто мнимая величина на всех частотах, а сама волна имеет вид $\exp(-|\xi_1| m)$. На низких частотах зависимость $\xi_1(\sigma)$ выражается прямой линией и совпадает с волновым числом неоднородной волны однородного стержня с линейной плотностью, равной $\rho_0 + M/l$, где ρ_0 — линейная плотность

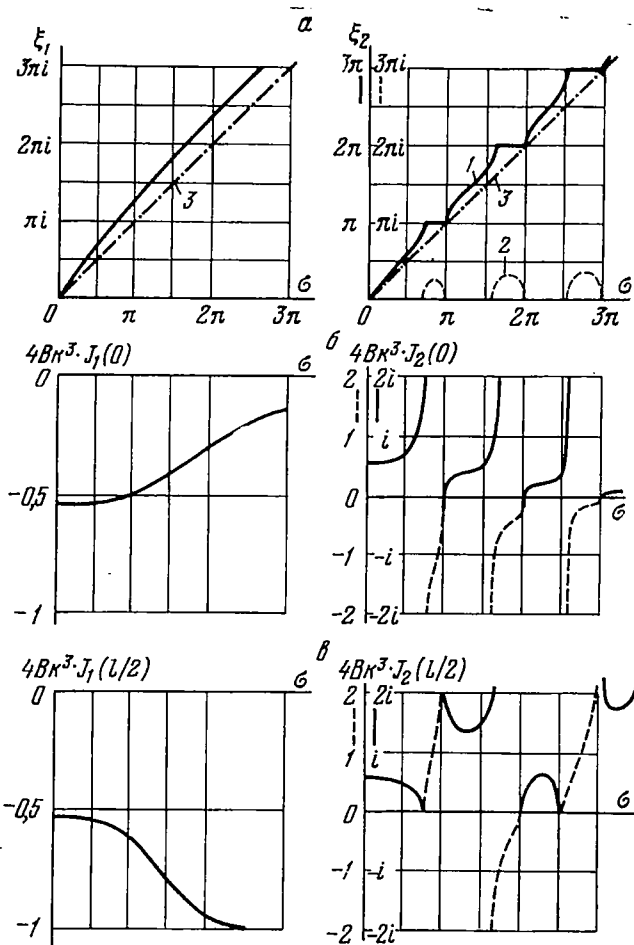


Рис. 12. Дисперсионные кривые и входные податливости для стержня с массами

a — кривые дисперсии: 1 — действительные значения; 2 — мнимые значения; 3 — дисперсионные кривые однородного стержня; *б* — входные податливости в узле; *в* — входные податливости в середине ячейки периодичности

ненагруженного стержня. На высоких частотах ($\sigma \gg 1$) эта зависимость подчиняется формуле $\xi_1 = i [\sigma + \ln(\sigma/\pi)]$. Соответствующая первой волне податливость в узле $J_1(0)$ изображена на рис. 12,б. $J_1(0)$ — действительная величина. На низких частотах она такая же, как и у утяжеленного однородного стержня. Начиная с частоты, соответствующей $\sigma = \pi$, она стремится к нулю, как σ^{-4} , потому что на высоких частотах податливость в узле определяется в основном податливостью одной нагрузочной массы. Входная податливость $J_1(l/2)$ изображена на рис. 12,в. На низ-

ких частотах она совпадает с $J_1(0)$. Следовательно, в диапазоне частот вплоть до $\sigma = \pi$ амплитуда неоднородной волны, возбуждаемой точечным источником, практически не зависит от точки его приложения. Начиная с частоты, соответствующей $\sigma = \pi$, функция $J_1(l/2)$ уменьшается и после $\sigma = 2\pi$ равна $-(4Bk^3)^{-1}$. Иными словами, как только между точкой приложения силы и ближайшей нагрузочной массой укладывается половина длины волны, податливость J_1 определяется только параметрами стержня и не зависит от нагрузки.

Постоянная распространения второй нормальной волны изображена на рис. 12, а справа. На низких частотах она действительно и прямо пропорциональна σ , как и для однородного, но более

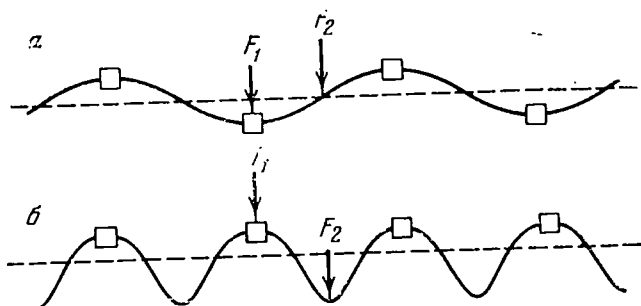


Рис. 13. Резонансные формы бесконечного стержня с массами
а — $\sigma = 0,72 \pi$; б — $\sigma = 1,65 \pi$

тяжелого стержня. В диапазоне частот, соответствующих $\sigma = 0,72 \pi \div \pi$, величина ξ_2 комплексна. Это полоса непропускания. Нормальная волна здесь имеет вид $(-1)^n \exp(-\text{Im } \xi_2 n)$. Затем вновь следует полоса пропускания и т. д. Податливость в узле $J_2(0)$, которая равна амплитуде второй нормальной волны, возбуждаемой единичной силой в этом узле, изображена на рис. 12, б. В полосах пропускания она чисто мнимая величина, а в полосах непропускания — действительная и отрицательная, т. е. имеет массовый характер. На низких частотах она совпадает с соответствующими слагаемыми утяжеленного однородного стержня. При приближении к границе первой полосы непропускания она неограниченно возрастает. Это резонанс неоднородного стержня, когда нагрузочные массы находятся в пучностях резонансной формы. На резонансной частоте амплитуда второй нормальной волны стремится к бесконечности, в то время как амплитуда первой нормальной волны, как мы видели, остается конечной. Аналогичное явление имеет место и на частоте, соответствующей $\sigma = 1,65 \pi$, и на всех остальных левых границах полос непропускания. На рис. 13 показаны две такие резонансные формы ($\sigma = 0,72 \pi$; $1,65 \pi$). На правых границах полос непропускания

($\sigma = \pi$) величина $J_2(0)$ равна нулю. Это антирезонансы системы, когда на отрезке ненагруженного стержня длиной l укладывается целое число полуволи [49]. Нагрузочные массы, а следовательно, и места приложения сил находятся на этих частотах в узлах нормальных форм колебаний. Отметим, что среднее значение податливости $J_2(0)$, определяемое пологими частями кривой рис. 12, б, стремится к нулю, так как на высоких частотах оно определяется в основном одной нагрузочной массой.

Податливость в точке между нагрузками (см. рис. 12, в) существенно отличается от податливости в узле. Они одинаковы на низких частотах. Но уже на границе первой полосы непропускания ($\sigma = 0,72\pi$) $J_2(l/2)$ обращается в нуль, в то время как величина $J_2(0)$ бесконечна (см. рис. 13, а). В первом случае сила F_2 приложена в узле резонансной формы, а во втором (F_1) — в пучности. На частоте, соответствующей $\sigma = \pi$, наоборот, сила F_2 приложена в пучности, а F_1 — в узле, и поэтому $J_2(l/2) \rightarrow \infty$, а $J_2(0) = 0$. На левой границе второй полосы непропускания силы F_1 и F_2 приложены в пучностях (см. рис. 13, б) и обе податливости $J_2(0)$ и $J_2(l/2)$ стремятся к бесконечности. На правой границе второй полосы непропускания ($\sigma = 2\pi$) они также одинаковы, но равны нулю. На этой частоте обе силы находятся в узлах нормальной формы колебаний. На более высоких частотах картина повторяется. На границах четных полос непропускания величины $J_2(0)$ и $J_2(l/2)$ ведут себя одинаково, а на границах нечетных полос — противоположным образом.

О числе нормальных волн в одномерных решетках

Здесь приводится простой способ подсчета числа нормальных волн в одномерной решетке, который не основан на исследовании дисперсионного уравнения и состоит в подсчете числа механизмов передачи колебательной энергии от ячейки к ячейке. Как правило, подсчет числа этих механизмов не составляет особого труда.

Связь между числом нормальных волн и числом механизмов передачи энергии устанавливается на основе результатов работы П. Е. Краснушкина [20], в которой рассматриваются нормальные волны в одномерных периодических цепочках из многополюсников. Показывается, что в цепочке из одинаковых $4N$ -полюсников существует N нормальных волн. Если на каждый $4N$ -полюсник наложить m жестких связей, число нормальных волн уменьшится на m .

К этому следует добавить, что поскольку каждые две пары клемм $4N$ -полюсника определяют один механизм передачи энергии от звена к звену, число нормальных волн в цепочке из многополюсников равно числу механизмов передачи энергии. Наложение

ние жестких связей на каждое звено уменьшает число механизмов, а следовательно, и нормальных волн на величину m .

Известно, что дискретной моделью однородной непрерывной струны является цепочка из четырехполюсников. Следовательно, отрезок струны длиной l , а значит, и одна ячейка струны с периодической сосредоточенной нагрузкой также могут быть представлены в виде некоторого четырехполюсника, а одномерная струнная решетка в целом — как цепочка из таких четырехполюсников. Таким образом, в периодически неоднородной струне может существовать одна нормальная волна, так как в ней определен только один механизм передачи энергии от ячейки к ячейке (это пара «сила — линейная скорость»). Аналогично струне, периодически неоднородный стержень, совершающий изгибные колебания, может быть представлен как цепочка из восьмиполюсников [45]. Энергия передается двумя механизмами (парами «перерезывающая сила — линейная скорость» и «изгибающий момент — угловая скорость»), и в этой решетке можно возбудить не более двух нормальных волн.

Пользуясь таким способом, можно сразу предсказать число нормальных волн в любой одномерной решетчатой конструкции. Пусть, например, это будет стержень с периодической несимметричной нагрузкой. Ясно, что кроме двух «изгибных» механизмов передачи энергии существует еще и третий — «продольный», так как из-за несимметрии нагрузки в стержне возбуждаются продольные волны. Таким образом, в такой структуре существуют три нормальные волны. В работах [48, 63], однако, дисперсионное уравнение указывает на присутствие только двух волн. Ограничиваясь высокочастотными колебаниями и предполагая, что неоднородные волны ненагруженного стержня успевают затухнуть на расстоянии l , авторы работ подразумевали, что одна из трех нормальных волн имеет глубину проникновения (или длину волны), равную нулю. И в самом деле, как это следует из рис. 11, б, в, для любой нагрузки одна из неоднородных нормальных волн решетки при $\sigma \gg 1$ имеет глубину проникновения, близкую к нулю ($|\xi| \gg 1$).

Наличие трех нормальных волн в стержне с несимметричной периодической нагрузкой можно проверить и непосредственно, написав дисперсионное уравнение. Матрицы групповых жесткостей в этом случае будут третьего порядка:

$$\begin{bmatrix} C_f & 0 & 0 \\ 0 & C_m & C_{mp} \\ 0 & C_{pm} & C_p \end{bmatrix} \text{ — для нагрузки,}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \text{ — для стержня,}$$

где p — продольная сила; величины $C_f, C_m, C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ — те же, что и в уравнении (6.2); величины C_{mp} и C_{pm} указывают на связь между поворотом нагрузки и ее продольным смещением; C_{33} — групповая продольная жесткость однородного стержня:

$$C_{33} = I_{np}^{-1} = 2Ek_{np} \frac{\cos \xi - \cos \sigma_{np}}{\sin \sigma_{np}}, \quad \sigma_{np} = k_{np}l,$$

k_{np} — волновое число продольной волны в стержне. Дисперсионное уравнение получится, если, как и раньше, приравнять нулю определитель суммы двух этих матриц. Подставив значения групповых жесткостей, нетрудно увидеть, что это — уравнение третьей степени относительно $\cos \xi$, что и означает наличие в структуре трех нормальных волн.

С помощью подсчета механизмов передачи энергии можно легко определять число нормальных волн и в более сложных одномерных решетках. Так, например, для двух параллельных стержней, соединенных упругими отрезками стержней, это число равно шести. Если отрезки поперечных стержней абсолютно жесткие, то это эквивалентно наложению трех жестких связей и число нормальных волн равно трем.

Глава 7

ДВУМЕРНАЯ РЕШЕТКА ИЗ СТРУН

Решетка из струн — одна из простейших двумерных решеток.

Некоторые биологические решетки по своим электрическим свойствам весьма близки к струнной решетке. Среди работ в этой области одной из первых и наиболее интересной является работа [39], в которой определены в замкнутом виде функции Грина и входной импеданс. В другой области — пневматике — колебания струнной решетки эквивалентны колебаниям воздуха, заключенного в систему трубок, соединенных между собой в виде решетки [48]. Рассмотрение струнной решетки полезно еще и тем, что здесь на простой структуре могут быть получены результаты, присущие всем двумерным периодическим структурам.

Дисперсионное уравнение

Разбиваем решетку на два составных элемента: набор струн, параллельных оси x_1 , и набор струн, параллельных оси x_2 . Взаимодействие составных элементов характеризуется силами

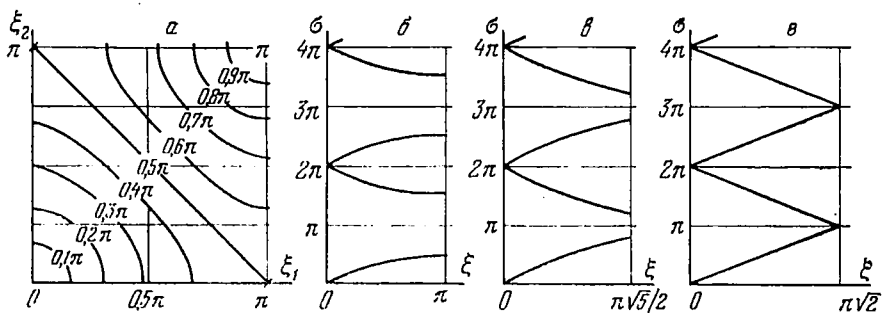


Рис. 14. Дисперсионные кривые квадратной решетки из одинаковых струн a — линии постоянного уровня $\sigma = 0 \div \pi$ дисперсионной поверхности $\sigma(\xi_1, \xi_2)$; b — дисперсионные кривые для волн, распространяющихся под углами $\varphi = 0, \arctg 0,5$ и $\pi/4$

реакции, которые в данном случае имеют плотность

$$f(x_1, x_2) = f \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - n_1 l_1) \delta(x_2 - n_2 l_2) \exp(i\mu_1 l_1 n_1 + i\mu_2 l_2 n_2).$$

Нетрудно проверить, что групповая жесткость каждого набора струн равна групповой жесткости отдельной струны из этого набора. Дисперсионное уравнение, следовательно, имеет вид

$$2k_1 T_1 \frac{\cos \sigma_1 - \cos \xi_1}{\sin \sigma_1} + 2k_2 T_2 \frac{\cos \sigma_2 - \cos \xi_2}{\sin \sigma_2} = 0. \quad (7.1)$$

Оно содержит $\cos \xi_1$ и $\cos \xi_2$ в первой степени; и значит, в струнной решетке существует одна нормальная волна.

Исследование уравнения (7.1) можно проводить графически. Для этого в плоскости (ξ_1, ξ_2) проводятся линии уровня частоты, т. е. кривые, вдоль которых частота остается постоянной. На рис. 14, a изображены линии уровня $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \div \pi$ квадратной решетки из одинаковых струн $k_1 = k_2 = k$, $T_1 = T_2 = T$. Если представить себе пространство, две оси которого будут ξ_1 и ξ_2 , а третья ось σ проходит перпендикулярно плоскости рис. 14, a , то линии уровня σ — сечения некоторой поверхности в пространстве горизонтальными плоскостями, а сама поверхность при $\sigma = 0 \div \pi$ представляется в виде внутренности чаши с выступающими краями $\xi_1 = \pm \pi$, $\xi_2 = \pm \pi$. Такие поверхности называются дисперсионными. В интервале $\sigma = \pi \div 2\pi$ поверхность совпадает с внутренностью такой же чаши, но перевернутой и поставленной на первую четыремя точками $(\pm \pi, \pm \pi)$. Для значений σ , больших 2π , все повторяется с периодом $\Delta\sigma = 2\pi$. Линии уровня рис. 14, a (или дисперсионные поверхности) удобны при исследовании распространения нормальной волны в различных направлениях. Чтобы найти дисперсионную зави-

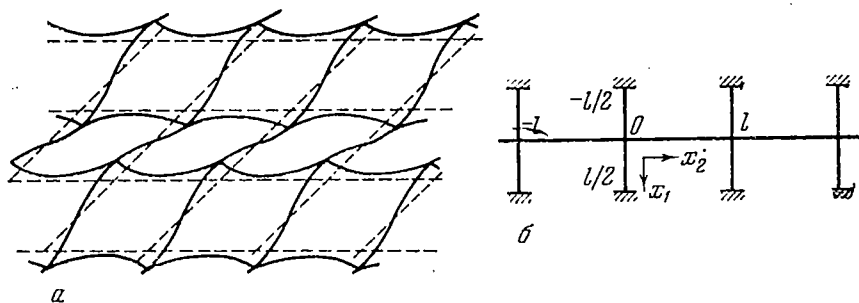


Рис. 15. Резонансная форма бесконечной двумерной струнной решетки на частоте, при которой $\sigma = \pi/2$ (а), и ее одномерная модель на этой частоте (б)

симость волны, распространяющейся под углом φ к оси x_1 , на рис. 14,а нужно провести прямую, проходящую через начало координат и наклоненную к оси ξ_1 на тот же угол. Пересечения этой прямой с линиями уровня дают сразу координаты точки искомой дисперсионной кривой. На рис. 14,б — з изображены дисперсионные кривые для трех направлений $\varphi = 0, \arctg 0,5$ и $\pi/4$. При распространении под углом $\varphi = 0$ решетка эквивалентна струне с периодической нагрузкой $C_n = -2kT \operatorname{tg}(\sigma/2)$. В низкочастотном диапазоне лежит полоса пропускания. Граничная частота, соответствующая $\sigma = \pi/2$, является резонансной для решетки. Форма колебания изображена на рис. 15,а. На этой частоте групповая скорость $C_{гр} = \operatorname{grad}_{\xi} \omega$ равна нулю во всех направлениях и передачи энергии от ячейки к ячейке нет. Каждая ячейка решетки колеблется на своей резонансной частоте независимо от соседних ячеек. Выше этой частоты следует полоса непропускания, оканчивающаяся на частоте, которой соответствует $\sigma = 3\pi/2$ и которая также является резонансной для одной ячейки решетки. При распространении под другими углами полосы непропускания сужаются, а на их границах групповая скорость становится отличной от нуля (см. рис. 14,в). Однако направлена она вдоль x_2 -струн и распространения энергии в направлении оси Ox_1 нет. На граничной частоте в этом случае решетка разбивается на бесконечное число полос шириной в одну ячейку. Распространение волны происходит таким образом, как если бы эти полосы были независимы. Одна такая полоса изображена на рис. 15,б. Она эквивалентна одномерной струнной решетке (см. главу 5).

При угле распространения, равном 45° , полос непропускания вообще нет, а дисперсия нормальной волны совпадает с дисперсией волны непрерывной однородной струны (см. рис. 14,з). Это явление совпадения. При $\varphi = 45^\circ$ оба набора струн колеблются одинаково и независимо и можно было бы разъединить их в узлах, не нарушая колебательного процесса.

Входная податливость

Функция Грина для двумерной решетки выражается в виде двойного интеграла от групповой податливости решетки, помноженной на фазовый множитель. Для рассматриваемой здесь квадратной струнной решетки она имеет вид

$$G(ml, nl/0, 0) = \frac{l}{2T} \left(\frac{\sin \sigma}{\sigma} \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\xi_1 m + i\xi_2 n) d\xi_1 d\xi_2}{2 \cos \sigma - \cos \xi_1 - \cos \xi_2}. \quad (7.2)$$

При $m = n = 0$ она равна податливости решетки

$$J = \frac{l}{2T} \left(\frac{\sin \sigma}{\sigma} \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{2 \cos \sigma - \cos \xi_1 - \cos \xi_2}. \quad (7.3)$$

Интеграл (7.3) может быть выражен через известные функции. Действительно, если его проинтегрировать один раз по ξ_2 , а затем произвести замену переменных $\eta = (\cos \xi_1 \pm \cos \sigma)/(1 \pm \cos \sigma)$, то получим

$$J = \frac{l}{4\pi T} \left(\frac{\sin \sigma}{\sigma} \right) \frac{4iK + 2K'}{1 + |\cos \sigma|},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода с прямым модулем $x^2 = (1 - |\cos \sigma|)/(1 + |\cos \sigma|)$; K' — такой же интеграл, но с дополнительным модулем $x'^2 = 1 - x^2$. Таким образом, податливость решетки из струн — комплексная величина. Мнимая ее часть характеризует ту энергию, которая уносится от источника на бесконечность, а действительная — ту, которая остается вблизи источника. На рис. 16 представлен график входной податливости. Как видно из графика, величина J всюду конечна, за исключением дискретных точек (напомним, что входная податливость мембраны бесконечна). Частоты, соответствующие $\sigma = \pi(n + 1/2)$ и на которых податливость оказывается бесконечной, являются резонансными. Сила при этом приложена в пучности резонансной формы и $J \rightarrow \infty$ (см. рис. 15,а). На частотах, соответствующих $\sigma = \pi n$, наоборот, податливость обращается в нуль. Эти частоты также резонансные для ячейки решетки. На них между соседними узлами решетки укладывается целое число полуволи. Резонансные формы в этом случае таковы, что сила приложена в узле и, естественно, испытывает бесконечное сопротивление.

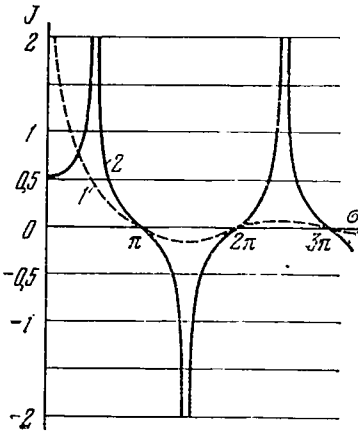


Рис. 16. Входная податливость в узле двумерной струнной решетки 1 — действительная часть; 2 — мнимая часть

Функцию Грина (7.2) не удалось представить в виде конечной комбинации известных функций. Здесь мы ограничимся исследованием ее асимптотического поведения ($m \gg 1, n \gg 1$.) Метод, с помощью которого рассматривается интеграл (7.2), является комбинацией метода стационарной фазы и метода, основанного на теории вычетов. В применении к «решетчатым» интегралам метод состоит в следующем.

Пусть имеется двойной интеграл типа

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\xi_1 m + i\xi_2 n) d\xi_1 d\xi_2}{\Phi(\cos \xi_1, \cos \xi_2, \sigma)}, \quad (7.4)$$

где $m \gg 1, n \gg 1$. Его можно проинтегрировать один раз, например по ξ_2 , так же как это делалось при вычислении входной податливости струны или стержня. Однократное интегрирование приведет к сумме вычетов в точках, в которых выполняется условие (дисперсионное уравнение)

$$\Phi(\cos \xi_1, \cos \xi_2, \sigma) = 0. \quad (7.5)$$

Это уравнение в неявном виде дает зависимость $\xi_2 = \xi_2(\xi_1, \sigma)$. В общем случае корни (7.5) ξ_2 могут быть комплексными, но в предположении $n \gg 1$ основной вклад в интеграл дадут лишь действительные корни уравнения (7.5). Таким образом, интеграл (7.4) равен

$$I = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[im\xi_1 + in\xi_2(\xi_1, \sigma)] d\xi_1}{\Phi_2'[\cos \xi_1, \cos \xi_2(\xi_1, \sigma), \sigma]},$$

где $\xi_2(\xi_1, \sigma)$ — действительные корни уравнения (7.5) и $\Phi_2' = \partial\Phi/\partial\xi_2$.

Для асимптотической оценки интеграла (7.4) применим теперь метод стационарной фазы. Согласно этому методу основной вклад в интеграл дают окрестности точек, в которых величина $[m\xi_1 + n\xi_2(\xi_1, \sigma)]$ постоянна (фаза стационарна). В комплексной области ξ_1 таких точек может быть несколько. Однако если $m \gg 1$, то принимать в расчет следует только действительные стационарные точки. Если $\xi_1^{(0)}$ — такая стационарная точка, то вместе с $\xi_2^{(0)}(\xi_1^{(0)}, \sigma)$ она определяет некоторую точку кривой (7.5) в действительной плоскости (ξ_1, ξ_2) . Покажем, что в этой точке нормаль к кривой (7.5) должна совпадать с направлением (m, n) . Действительно, в стационарной точке приращение $d[m\xi_1 + n\xi_2] = 0$, т. е. $m + (d\xi_2/d\xi_1)n = 0$. Найдя из (7.5) производную $d\xi_2/d\xi_1 = -\Phi_1'/\Phi_2'$, получим $m/\Phi_1' = n/\Phi_2'$. Это и означает, что нормаль к кривой (7.5), направление которой определяется частными производными Φ_1' и Φ_2' , совпадает с направлением (m, n) . Таким

образом, асимптотическое поведение интеграла (7.4) определяется одной или несколькими точками действительной кривой (7.5), удовлетворяющими отмеченным выше условиям.

Пусть $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ — одна такая точка. Тогда, рассматривая поведение интеграла (7.4) только в окрестности этой точки, получим

$$I \approx \left[\frac{1}{2\pi |\chi| \cdot n} \right]^{1/2} \frac{i}{\Phi_2^{(0)}} \exp \left[i (\xi_1^{(0)} m + \xi_2^{(0)} n + \frac{\pi}{4} \text{sign } \chi) \right], \quad (7.6)$$

где $\Phi_2^{(0)}$ означает, что производная взята в точке $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$, а величина $\chi = d^2 \xi_2 / d \xi_1^2$ определяет кривизну кривой (7.5) в стационарной точке и вычисляется по формуле

$$\chi = (\Phi_{11} \Phi_2^2 - 2 \Phi_{12} \Phi_2 \Phi_1 + \Phi_{22} \Phi_1^2) / \Phi_2^3,$$

где $\Phi_{12} = \partial^2 \Phi / \partial \xi_1 \partial \xi_2$, $\Phi_{11} = \partial^2 \Phi / \partial \xi_1^2$. Исходя из полученных результатов, можно найти форму фронта волны вдали от источника. Рассмотрим фронт волны с нулевой фазой

$$\xi_1 m + \xi_2 n - \omega t = 0. \quad (7.7)$$

Поскольку волна в точке (m, n) определяется стационарной точкой кривой (7.5), в которой $m / \Phi_1' = n / \Phi_2'$, то можно записать

$$m = \Omega \Phi_1', \quad n = \Omega \Phi_2', \quad (7.8)$$

где Ω — скалярная величина. Подставляя (7.8) в (7.7), получим величину этого скаляра $\Omega = \omega t / (\xi_1 \Phi_1' + \xi_2 \Phi_2')$. После этого последние два равенства приводят к параметрическому уравнению фронта волны

$$\begin{aligned} m &= \omega t \Phi_1' / (\xi_1 \Phi_1' + \xi_2 \Phi_2'), \\ n &= \omega t \Phi_2' / (\xi_1 \Phi_1' + \xi_2 \Phi_2'), \\ \Phi(\xi_1, \xi_2, \sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Если из трех уравнений исключить ξ_1 и ξ_2 , то уравнение фронта волны может быть получено в явном виде: $f(m, n) = 0$. Это, однако, не всегда удается сделать. Часто удобнее воспользоваться геометрическим построением. Кривая (7.5) и кривая фронта волны $f(m, n) = 0$, связанные уравнением (7.7), называются в математике подэрой и антиподэрой. В соответствии с общими правилами построение кривой производится так: для конкретного вектора ξ кривой (7.5) строится прямая, перпендикулярная ξ и удовлетворяющая уравнению (7.7); затем такая же прямая строится для другого ξ , для третьего и т. д., пока не наберется достаточно, чтобы провести огибающую всех этих прямых; огибающая и будет искомой прямой фронта волны. Подробно это изложено в работе [42]. Такой метод асимптотических оценок двойных интегралов типа (7.4) применим для исследования функ-

ции Грина квадратной струнной решетке (7.2). Кривые (7.5)

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \sigma) = 2 \cos \sigma - \cos \xi_1 - \cos \xi_2 = 0 \quad (7.10)$$

в действительной плоскости (ξ_1, ξ_2) изображены на рис. 14,а для различных значений σ . На низких частотах $\sigma \ll 1$ переменные величины ξ_1 и ξ_2 также малы и поэтому вместо (7.10) будет

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 2\sigma^2,$$

что является уравнением семейства окружностей. Его можно рассматривать как дисперсионное уравнение волн однородной изотропной мембраны с плотностью $\rho_m = 2\rho_{ст}/l$ и натяжением $T_m = T_{ст}/l$. Таким образом, с точки зрения дисперсии волн струнная решетка на низких частотах ведет себя как мембрана. Кроме того, амплитуда вынужденных колебаний решетки убывает с расстоянием как

$$w \approx \frac{F_0 \exp(-i\omega t)}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}kr}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(\sqrt{2}kr - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

где $r^2/e^2 = m^2 + n^2$, т. е. как и функция Грина однородной мембраны, равная $AN_0(\sqrt{2}kr)$. Однако сходство струнной решетки и мембраны пропадает, если речь идет об импедансах или жесткостях. Входная податливость решетки почти везде конечна, в то время как податливость мембраны бесконечна на всех частотах.

На произвольных частотах $\chi = (\cos \xi_1 \sin^2 \xi_2 + \cos \xi_2 \sin^2 \xi_1) / \sin^2 \xi_2$ и $\Phi_2^1 = \sin \xi_2$. Из соотношения (7.6) сразу видно, что на всех частотах и в любом направлении убывание амплитуды волны пропорционально $r^{-1/2}$. Для направления $\varphi = \pi/2$, например, стационарной точкой кривой рис. 14,а является $\xi_1^{(0)} = 0$ и $\xi_2^{(0)} = \arccos(2 \cos \sigma - 1)$. Кривизна дисперсионной кривой в этой точке равна $\chi = 1/\sin \xi_2^{(0)}$ и $\Phi_2^1 = \sin \xi_2^{(0)}$. Подставляя эти выражения в (7.6) и полагая $n = r$, получим, что амплитуда колебаний, в направлении $\varphi = \pi/2$ убывает как

$$w \approx r^{-1/2} [4 \cos \sigma (1 - \cos \sigma)]^{-1/4}.$$

При стремлении частоты к границе полосы непропускания т. е. при $\sigma \rightarrow \pi/2$ (см. рис. 15), амплитуда колебаний решетки неограниченно возрастает. Как уже отмечалось, эта частота, а также частоты, соответствующие равенству $\sigma = \pi(n + 1/2)$, являются резонансными для решетки, и при действии внешней силы (если только она не приложена в узле резонансной формы) амплитуды колебаний решетки, естественно, должны возрастать до бесконечности.

Для направления $\varphi = \pi/4$ стационарная точка имеет координаты $\xi_1^{(0)} = \xi_2^{(0)} = \sigma$ и кривизна равна $\chi = 2 \operatorname{ctg} \sigma$. Подстановкой этих выражений в (7.6) получаем, что амплитуда вынужден-

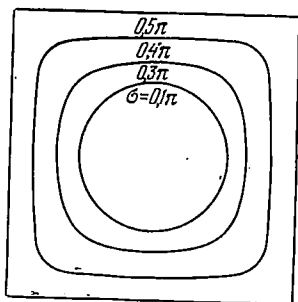


Рис. 17. Кривые фронта волны, расходящихся от точечного источника, на частотах, соответствующих различным σ

ных колебаний в этом направлении убывает как

$$w \approx r^{-1/2} (\sin 2\sigma)^{-1/2}.$$

На резонансных частотах $\sigma = \pi(n + 1/2)$ амплитуда w стремится к бесконечности во всех точках решетки.

Посмотрим теперь, какую форму имеет фронт волны для разных значений σ . Кривые фронта, построенные по формулам (7.9), представлены на рис. 17. На самых низких частотах фронтами волн являются окружности. При увеличении частоты окружности искажаются, становятся более «прямоугольными». На частотах, близких к $\sigma = \pi/2$, форма волны почти квадратная. При этом, как отмечалось, амплитуда колебаний вырастает до бесконечности. При дальнейшем увеличении частоты форма волны сглаживается и при $\sigma = \pi$ становится круглой. При последующем повышении частоты картина повторяется. Отметим, что кривые фронта волны (см. рис.17) очень схожи с линиями уровня частоты на рис. 14,а, повернутыми на 45° . Несмотря на то что уравнения этих кривых разные, их графики почти идентичны. В связи с этим практически форму фронта волны можно определить сразу «на глазок» по дисперсионным кривым на рис. 14,а.

Глава 8

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ РЕШЕТКИ

В настоящей главе исследуются свободные и вынужденные колебания двумерной стержневой решетки. Попытка строго рассмотреть задачу была предпринята Хеклом [48]. Хекл рассмотрел частный случай прямоугольной решетки, у которой узлы не поворачиваются и могут только смещаться в поперечном направлении. Хекл также предположил, что частоты достаточно высокие и неоднородные волны, возникающие в узлах, успевают затухнуть на расстоянии меньшем, чем шаг решетки. При таких допу-

щениях в работе [48] было получено дисперсионное уравнение, из которого следует наличие полос пропускания и непропускания.

Рассмотренный Хеклом частный случай характерен тем, что в этой конструкции существуют только изгибные волны. Однако в произвольной стержневой решетке дело обстоит иначе. Изгибные и крутильные волны стержней, взаимодействуя в узлах, образуют сложные изгибно-крутильные, решетчатые волны, которые можно считать чисто изгибными или крутильными только в некоторых предельных случаях. Исследование решетчатых волн затрудняется из-за того, что в общем случае их нельзя привести ни к одному из хорошо изученных типов колебаний. Поэтому при рассмотрении колебаний решетки с жестким соединением стержней в узлах (см. ниже) основное внимание уделено разбору частных случаев, в которых решетчатые волны вырождаются в какие-нибудь известные. Так, на низких частотах изучается упрощенная расчетная модель и аналогия между колебаниями решетки и однородной пластины, а для высокочастотных колебаний получены приближенные формулы, позволяющие с некоторой степенью точности представить решетчатые волны чисто изгибными и крутильными. При этом важную роль играет решетка, рассмотренная Хеклом. Что касается вынужденных колебаний, то ни функции Грина, ни входная податливость почти нигде не выражаются через известные функции. Исключения составляют только тривиальные случаи и высокочастотные колебания, где с определенной степенью точности входная податливость для перерезывающей силы выражается через полные эллиптические интегралы.

Вывод общих формул

При выводе дисперсионного уравнения стержневой решетки с жестким соединением в узлах следует учесть, что взаимодействие стержней характеризуется тремя величинами — поперечными силами реакции и двумя взаимно перпендикулярными моментами сил реакции. Поэтому для решетки в целом и для ее отдельных элементов (т. е. для двух наборов параллельных стержней) определены матрицы групповых жесткостей третьего порядка. Матрица для x_1 -стержней имеет вид

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & 0 & C_{12}^{(1)} \\ 0 & C_{кр}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(1)} & 0 & C_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

для x_2 -стержней

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{кр}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

и для целой решетки она равна сумме матриц (8.1) и (8.2). Здесь $C_{ik}^{(m)}$ — элементы матрицы второго порядка, обратной матрице, составленной из элементов (6.1). Напишем их в явном виде:

$$\begin{aligned} C_{11}^{(m)} &= 2B_m k_m^3 Q(\sigma_m, \xi_m)/(1 - \cos \sigma_m \operatorname{ch} \sigma_m), \\ C_{12}^{(m)} &= -C_{21}^{(m)} = 2B_m k_m^2 i \sin \xi_m (\operatorname{ch} \sigma_m - \cos \sigma_m)/(1 - \cos \sigma_m \operatorname{ch} \sigma_m), \\ C_{22}^{(m)} &= 2B_m k_m P(\sigma_m, \xi_m)/(1 - \cos \sigma_m \operatorname{ch} \sigma_m), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_m &= \mu_m l_m; & \sigma_m &= k_m l_m; & P(\sigma, \xi) &= \sin \sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma \cos \sigma + \\ & & & & & + (\operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma) \cos \xi; & Q(\sigma, \xi) &= \sin \sigma \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma \cos \sigma - \\ & & & & & - (\operatorname{sh} \sigma + \sin \sigma) \cos \xi; & m &= 1, 2. \end{aligned}$$

Элементы $C_{кр}^{(m)}$ — являются групповыми крутильными жесткостями стержней и равны

$$C_{кр}^{(m)} = 2C_m \kappa_m (\cos \kappa_m l_m - \cos \xi_m)/\sin \kappa_m l_m, \quad (8.4)$$

где $m = 1, 2$; κ_m — волновое крутильное число; C_m — крутильная жесткость.

Приравнивая нулю определитель матрицы групповых жесткостей решетки, получаем дисперсионное уравнение. В развернутом виде оно записывается так:

$$\begin{aligned} (C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)})(C_{22}^{(2)} + C_{кр}^{(1)})(C_{22}^{(1)} + C_{кр}^{(2)}) - C_{12}^{(1)} C_{21}^{(1)} (C_{22}^{(2)} + C_{кр}^{(1)}) - \\ - C_{12}^{(2)} C_{21}^{(2)} (C_{22}^{(1)} + C_{кр}^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Если в (8.5) подставить значения (8.3) и (8.4), то получится уравнение третьей степени относительно $\cos \xi_1$ и $\cos \xi_2$. Это означает, что в решетке с жестким соединением стержней в узлах существуют три нормальные решетчатые волны.

Если путем обращения суммы матриц (8.1) и (8.2) найти матрицу групповых податливостей решетки, то, помножив элементы этой матрицы на фазовый множитель $\exp(i\xi_1 n_1 + i\xi_2 n_2)$, проинтегрировав их дважды по ξ_1 и ξ_2 в пределах $[-\pi, \pi]$, получим матрицу функции Грина решетки:

$$G_{ik}(n_1 l_1, n_2 l_2/0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{ik}(\xi_1, \xi_2) \exp(i\xi_1 n_1 + i\xi_2 n_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (8.6)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, представляющие практический интерес.

Вырожденная решетка

Простейшей конструкцией решетки является вырожденная решетка, у которой толщина, например, x_2 -стержней стремится к нулю. Вырожденная решетка, иначе говоря, представляет собой набор ничем не связанных x_1 -стержней. Все жесткости, относящиеся к x_2 -стержням, обращаются в нуль, и дисперсионное уравнение (8.5) в данном случае записывается следующим образом:

$$16B_1^2 C_1 k_1^4 \kappa_1 \frac{(\cos \sigma_1 - \cos \xi_1) (\operatorname{ch} \sigma_1 - \cos \xi_1) (\cos \kappa_1 l_1 - \cos \xi_1)}{\sin \kappa_1 l_1 (1 - \cos \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_1)} = 0. \quad (8.7)$$

Постоянная распространения имеет три корня $\pm \mu = k_1, ik_1, \kappa_1$, совпадающих с волновыми числами крутильной и изгибных волн однородного x_1 -стержня. В уравнение (8.7) не входит компонента μ_2 постоянной распространения. Она характеризует фазовый сдвиг между волнами, бегущими в двух соседних x_1 -стержнях, и поэтому является функцией угла распространения φ и компоненты μ_1 ($\mu_2 = \mu_1 \operatorname{tg} \varphi$). Таким образом, тремя нормальными волнами вырожденной решетки являются две изгибные волны (однородная и неоднородная) и одна крутильная. Нетрудно проверить, что групповая скорость всегда направлена вдоль оси x_1 , в то время как фазовая скорость может иметь и другие направления, и что формулы (8.6) определяют функции Грина бесконечного однородного x_1 -стержня. Например, для первой функции Грина имеем

$$G_{11}(x_1, 0/0, 0) = (4B_1 k_1^3)^{-1} (i \exp(ik_1 |x_1|) - \exp(-k_1 |x_1|)).$$

На практике вырожденная решетка с успехом может служить расчетной моделью для решеток, у которых жесткости одних стержней много больше жесткости других, например x_2 -стержней. Несмотря на малость обычных жесткостей x_2 -стержней, групповые жесткости на некоторых частотах могут достигать больших значений. Такими частотами являются резонансные частоты отрезка стержня длиной l , определяемые уравнениями $\sin \kappa_2 l_2 = 0$ и $1 - \cos \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_2 = 0$. В окрестности этих частот в уравнении (8.5) нельзя пренебрегать групповыми жесткостями x_2 -стержней. Расчетная модель, таким образом, будет верна во всем частотном диапазоне, за исключением узких полос вблизи резонансных частот x_2 -стержня длиной l , зажатого с обоих концов. Ширина этих полос тем меньше, чем больше будет отношение обычных жесткостей x_1 - и x_2 -стержней.

Решетка Хекла

Хекл [48] рассмотрел решетку, у которой узлы совершают только поперечные колебания и не могут поворачиваться. Такая решетка может быть реализована только с помощью специальных

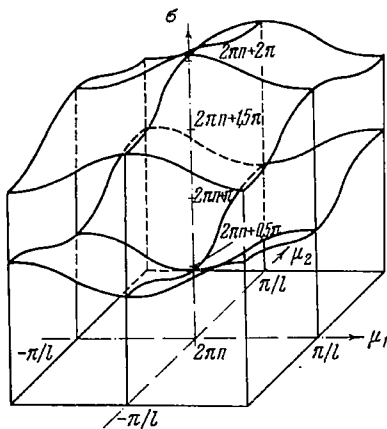


Рис. 18. Часть дисперсионной поверхности нормальных волн в квадратной решетке Хекла

механических приспособлений. Тем не менее, несмотря на ее искусственность, модель Хекла представляет чрезвычайный практический интерес, так как имеет непосредственное отношение к высокочастотным колебаниям обычной решетки.

Поскольку решетка не может поворачиваться в узлах, групповые крутильные жесткости обоих наборов стержней следует устремить в бесконечность $C_{кр}^{(m)} \rightarrow \infty$. Тогда из уравнения (8.5) следует

$$C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} = 0. \quad (8.8)$$

Это уравнение первого порядка относительно $\cos \xi_1$ и $\cos \xi_2$, откуда следует, что в модели Хекла существует только одна нормальная волна. На высоких частотах уравнение (8.8) имеет вид

$$2B_1 k_1^3 \frac{\sin \sigma_1 + \cos \sigma_1 - \cos \xi_1}{\cos \sigma_1} + 2B_2 k_2^3 \frac{\sin \sigma_2 + \cos \sigma_2 - \cos \xi_2}{\cos \sigma_2} = 0, \quad (8.9)$$

что в точности совпадает с уравнением, полученным Хеклом.

Анализ уравнений (8.8) и (8.9) лучше всего проводить с помощью дисперсионных поверхностей. На рис. 18 представлена часть такой поверхности для квадратной решетки, составленной из одинаковых стержней $k_1 = k_2 = k$, $l_1 = l_2 = l$. Укажем на некоторые свойства поверхности, которые следуют из трансляционной симметрии решетки. Поверхность симметрична относительно точек $(\pm \pi n_1/l, \pm \pi n_2/l)$ и имеет зеркальные плоскости симметрии $\mu_1 = \pm \pi/l$, $\mu_2 = \pm \pi/l$. Вследствие этого в точках симметрии в центрах отрезков, соединяющих узлы обратной решетки, поверхность достигает экстремума и производная $d\omega/d\mu$, т. е. групповая скорость, равна нулю: в точках $(0, \pm \pi/l)$ и $(\pm \pi/l, 0)$ — для главных направлений $\varphi = 0, \pi/2$, а в точках симметрии $(0, 0)$, $(\pm \pi/l, \pm \pi/l)$ — для всех направлений распространения волн.

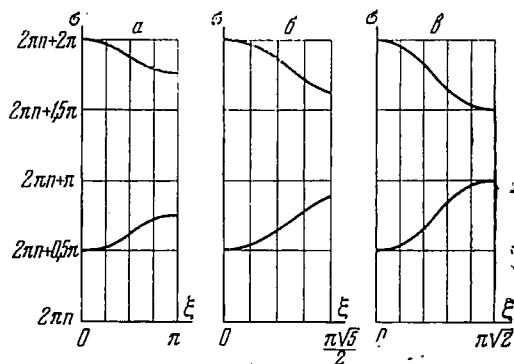


Рис. 19. Дисперсионные кривые волн, распространяющихся в решетке Хекла под углами

$a - \varphi = 0; \quad б - \varphi = \text{arctg } 0,5;$
 $в - \varphi = \pi/4$

Поверхности дисперсии удобны для исследования распространения нормальных волн в произвольном направлении. Дисперсионная кривая, т. е. зависимость действительных значений μ от частоты ω (или σ), для волны, распространяющейся под углом φ к оси x_1 , является пересечением дисперсионной поверхности с плоскостью, проходящей через ось σ под углом φ к оси μ_1 . На рис. 19 эти зависимости представлены для трех направлений $\varphi = 0, \text{arctg } 0,5, \pi/4$. Как видно из рис. 19, для любого направления распространения волны в интервале частот $\sigma = 2\pi n \div \div 2\pi(n+1)$ всегда имеются две полосы пропускания, где значения действительны. На остальных частотах, т. е. в полосах непропускания, μ комплексно и нормальная волна затухает с расстоянием.

В практических приложениях важно уметь находить граничные частоты полос непропускания. Из главы 7 следует, что при распространении волн под углами $\varphi = 0, \pi/4$ и $\pi/2$ граничными частотами прямоугольной решетки являются собственные частоты одной ячейки периодичности. Рассмотрим этот вопрос подробнее и проследим, как при этом колеблется решетка Хекла.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x_1 . На граничных частотах, соответствующих $\sigma = 2\pi n + 0,5\pi$, обе постоянные распространения ξ_1 и ξ_2 равны нулю. Все узлы, следовательно, ведут себя одинаково, и граничные условия для ячейки периодичности, т. е. для креста, образованного из двух одинаковых стержней длиной l , будут следующими: $w' = w''' = 0$ на всех его четырех концах. Нетрудно проверить, что такими же, как у этого креста, будут нечетные собственные частоты стержня, зажатого на концах. Одна из форм колебаний решетки Хекла на этих частотах показана на рис. 20, а. Узлы, как видно из рисунка, остаются неподвижными.

На частотах, соответствующих $\sigma = 2\pi n + 0,75\pi$ и $\sigma = 2\pi n - 0,5\pi$, компонента $\xi_2 = 0$, а $\xi_1 = \pi$. Поэтому все узлы, лежащие на любом x_2 -стержне, колеблются синфазно, а каждые два соседних узла, лежащих на x_1 -стержне, колеблются в противофазе. В соответствии с этим граничные условия для креста

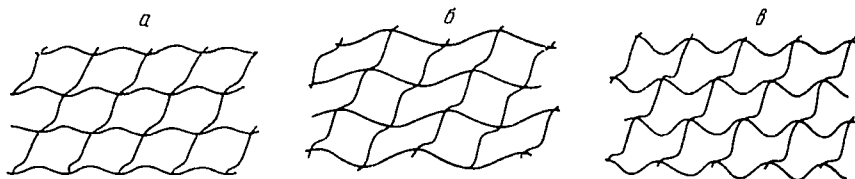


Рис. 20. Резонансные формы колебаний решетки Хекла на частотах, соответствующих

$a - \sigma = 0,5\pi$; $б - \sigma = 0,75\pi$; $в - \sigma = 2\pi$

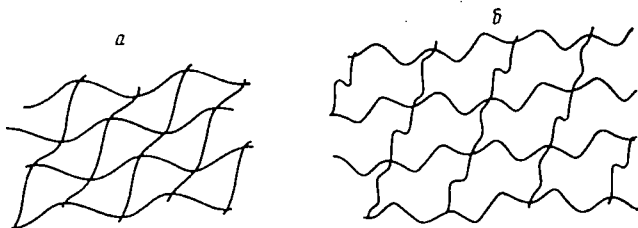


Рис. 21. Резонансные формы колебаний решетки Хекла на частотах, соответствующих

$a - \sigma = \pi$; $б - \sigma = 1,5\pi$

будут следующими: $w = w'' = 0$ при $x_1 = \pm l/2$ (условия опирания), $w' = w''' = 0$ при $x_2 = \pm l/2$. Форма колебаний решетки на одной из таких собственных частот креста показана на рис. 20, б.

На граничных частотах, удовлетворяющих равенству $\sigma = 2\pi n$, все узлы решетки колеблются в фазе. Как и на частотах $\sigma = 2\pi n + 0,5\pi$, граничные условия будут одинаковы на всех четырех концах креста: $w' = w''' = 0$. Однако форма колебаний будет другая (рис. 20, в). Как видно из рисунка, x_1 - и x_2 -стержни колеблются одинаково, и поэтому силы их взаимодействия равны нулю, а собственные частоты креста эквивалентны четным собственным частотам отрезка стержня длиной l с граничными условиями $w' = w''' = 0$ на обоих краях.

При распространении волны под углом $\varphi = \pi/4$ граничные частоты $\sigma = 2\pi n + 0,5\pi$, $2\pi n$ и соответствующие формы колебаний решетки будут такими же, как и для углов $\varphi = 0, \pi/2$. На остальных граничных частотах ($\sigma = 2\pi n + \pi, 2\pi n - 0,5\pi$) обе компоненты постоянной распространения равны $\xi_1 = \xi_2 = \pi$ и любые два соседних узла колеблются в противофазе. Граничные условия на концах креста должны быть тогда равны $w = w'' = 0$. Однако формы колебаний на этих двух группах частот разные. На частотах, соответствующих $\sigma = 2\pi n + \pi$, x_1 -стержни и x_2 -стержни колеблются одинаково. Поэтому все эти граничные частоты равны нечетным собственным частотам одного отрезка стержня длиной l , опертого по краям. Одна из форм колебаний

показана на рис. 21,а. На частотах, соответствующих $\sigma = 2\pi l - 0,5\pi$, узлы решетки остаются неподвижными. Граничные частоты равны четным собственным частотам зажатого с обеих сторон стержня длиной l . Форма колебаний на одной из таких частот изображена на рис. 21,б.

Таким образом, при распространении волн в направлениях $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$ граничными частотами в большинстве случаев являются собственные частоты отрезка стержня длиной l с теми или иными краевыми условиями. Только в одном случае для вычисления граничных частот нужно рассматривать собственные колебания креста. Но даже и тогда вычисления оказываются более экономичными, чем при нахождении границ из дисперсионного уравнения. Для многих практических задач найденных граничных частот вполне достаточно, так как при распространении волн в других направлениях половина граничных частот ($2\pi l + 0,5\pi, 2\pi l$) остается такой же, а остальные лежат в интервалах $(2\pi l - 0,5) \div (2\pi l - \pi)$ и $(2\pi l + 0,75\pi) \div (2\pi l + \pi)$. Концами этих интервалов являются уже найденные частоты.

В заключение отметим, что решетка Хекла является одним из немногих частных случаев, когда некоторые из интегралов (8.6) удается выразить через известные функции. Такова, в частности, входная силовая податливость J_F , т. е. отношение смещения к силе, приложенной в начале координат. Она представляется через тригонометрические функции и полные эллиптические интегралы первого рода. Так, в интервале частот $\sigma = 2\pi l \div (2\pi l + 0,5\pi)$, т. е. в полосе непропускания волн всех направлений (см. рис.19), входная податливость действительна:

$$J_F = K' \cos \sigma / 2Bk^3\pi (1 + \sin \sigma + \cos \sigma),$$

где K' — полный эллиптический интеграл первого рода с дополнительным модулем. Прямой модуль равен $x = |\sin \sigma + \cos \sigma - 1| / |\sin \sigma + \cos \sigma + 1|$. Вся энергия на этих частотах сосредоточена в ближнем поле. В интервале частот $\sigma = (2\pi l + 0,5\pi) \div (2\pi l + 0,75\pi)$, т. е. в полосе пропускания волн всех направлений, входная податливость комплексна:

$$J_F = (K' + iK) \cos \sigma / 2Bk^3\pi (1 + \sin \sigma + \cos \sigma),$$

где K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода с тем же прямым модулем, как и в предыдущем случае. Здесь часть энергии сосредоточена в ближнем поле, а часть уносится волной на бесконечность. Аналогичные формулы можно получить для J_F в других частотных диапазонах.

Высокочастотные колебания решетки

На высоких частотах можно считать выполненным следующее условие:

$$Ck \gg Bk. \quad (8.10)$$

Действительно, оно будет верно при любых значениях параметров B и C : так как крутильное волновое число κ пропорционально первой степени частоты ω , а изгибное — корню из ω . Условие (8.10) выражает то обстоятельство, что крутильная жесткость однородного стержня во много раз превосходит его жесткость к повороту. На высоких частотах, следовательно, крутильная волна, возбужденная в некотором стержне решетки, практически не встречает сопротивления со стороны других стержней, а изгибная волна, наоборот, в каждом узле встречает огромное сопротивление к повороту, так что при изгибных колебаниях узлы решетки не поворачиваются и смещаются только линейно. Исключение составляют узкие окрестности резонансных частот стержней длиной l_1 и l_2 , в которых либо сопротивление изгибающему моменту становится большим (изгибный резонанс), либо крутильное сопротивление становится малым (крутильный резонанс).

На высоких частотах, таким образом, всюду, за исключением счетного числа узких полос частот, тремя нормальными волнами решетки являются две крутильные волны вырожденной решетки и одна изгибная волна решетки Хекла. Дисперсионное уравнение этих волн

$$C_{кр}^{(1)} C_{кр}^{(2)} (C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}) = 0 \quad (8.11)$$

получается из уравнения (8.5) при наложении на него условия

$$C_{кр} \gg C_{22}. \quad (8.12)$$

Легко видеть, что условия (8.10) и (8.12) совпадают почти на всех частотах, кроме узких полос, о которых говорилось выше.

Замена точного уравнения (8.5) приближенным (8.11) сильно облегчает расчеты высокочастотных колебаний решетки. Кроме того, что упрощается исследование дисперсии нормальных волн, появляется возможность выразить через известные функции входные податливости. Две моментные входные податливости решетки оказываются равными входным крутильным податливостям однородных x_1 - и x_2 -стержней, а входная податливость для силы будет такой же, как и у решетки Хекла.

Интересно выяснить теперь, как отличаются точное и приближенное решения, т. е. какая ошибка вносится подменой неравенства (8.10) неравенством (8.12). С этой целью рассмотрим распространение нормальных волн вдоль оси x_1 и сравним дисперсию волн, полученную из точного уравнения (8.5) и из приближенного (8.10) (рис.22).

Наибольшее отличие дисперсионных кривых крутильной и квазикрутильной волн (пунктирные линии) — в окрестности точек $\sigma = 2\pi l \pm 0,5\pi$. Эти точки соответствуют резонансным частотам отрезка стержня, защемленного на обоих концах. Групповая жесткость C_{22} на этих частотах стремится к бесконечности, поэтому квазикрутильная волна встречает в узлах бесконечное со-

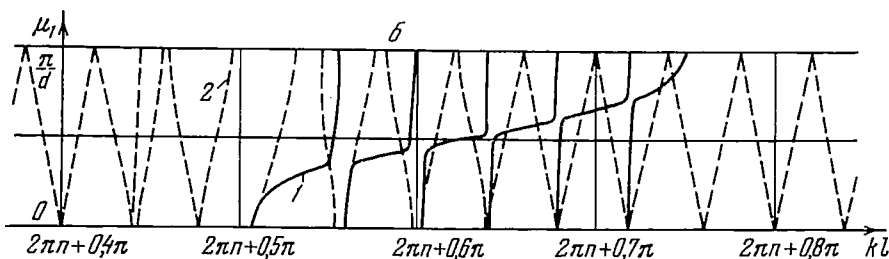
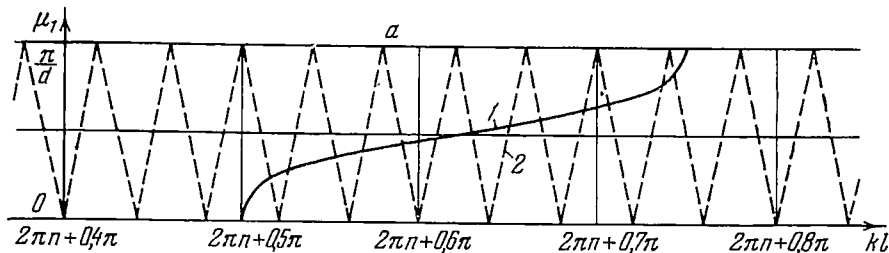


Рис. 22. Дисперсионные кривые двух нормальных волн стержневой решетки, распространяющихся под углом $\varphi = 0$

a — приближенное решение; 1 — для нормальной волны решетки Хекла; 2 — для крутильной волны вырожденной решетки; b — точное решение по формуле (8.5); 1 — для квазиизгибной волны; 2 — для квазикрутильной

противление и не может распространяться. В окрестности этих частот наблюдаются полосы непропускания. При удалении от точек $\sigma = 2\pi l \pm 0,5\pi$ групповая жесткость C_{22} уменьшается и на всех других частотах дисперсия квазикрутильной волны практически совпадает с дисперсией крутильной волны вырожденной решетки.

Отличие в дисперсии изгибной и квазиизгибной волн (сплошные линии) отмечено в основном вблизи частот, на которых в отрезке стержня длиной l укладывается целое число крутильных волн. На этих частотах групповая крутильная жесткость стремится к нулю, а кривая дисперсии квазиизгибной волны терпит разрыв.

Таким образом, отличие приближенного и точного решений весьма велико в некоторых узких полосах частот. Дисперсия реальных решетчатых волн оказывается намного сильнее, чем дисперсия волны решетки Хекла и крутильных волн вырожденной решетки. По этой причине замена уравнения (8.5) приближенным (8.11) недопустима при таких расчетах, где существенное значение имеют скорости распространения волн, например при вычислении коэффициента корреляции между вибрациями различных точек решетки. Но во многих других практических приложениях этим отличием можно пренебречь.

Решетка

с шарнирным соединением стержней в узлах

В этом случае взаимодействие стержней характеризуется только силами реакции. Поэтому дисперсионное уравнение такой решетки можно получить из уравнения (8.5), полагая в нем $C_{кр}^{(m)} = 0$,

$$C_{22}^{(1)} \Delta^{(2)} = C_{22}^{(2)} \Delta^{(1)} = 0,$$

где

$$\Delta^{(m)} = C_{11}^{(m)} C_{22}^{(m)} - C_{12}^{(m)} C_{21}^{(m)} = 8B_m^2 k_m^4 \frac{(\cos \sigma_m - \cos \xi_m) (\operatorname{ch} \sigma_m - \cos \xi_m)}{1 - \cos \sigma_m \operatorname{ch} \sigma_m},$$

$$m = 1, 2,$$

или, что то же самое,

$$I^{(1)} + I^{(2)} = 0, \tag{8.13}$$

где $I^{(m)}$ определяется первой формулой (6.1). Уравнение (8.13) дает значения для постоянной распространения трех нормальных изгибных волн. К ним нужно еще добавить две независимые волны вырожденной решетки. Эти две волны не учитываются при выводе уравнения (8.13), и, таким образом, общее число нормальных волн в решетке с шарнирами равняется пяти.

В практических приложениях эта решетка играет важную роль. Она является низкочастотной моделью обычной решетки с жестким соединением. В самом деле, на низких частотах всегда можно считать выполненным условие

$$C_k \ll Bk, \tag{8.14}$$

обратное условию (8.10). Всюду, за исключением узких полос частот, это неравенство влечет за собой другое неравенство

$$C_{кр} \ll C_{22}, \tag{8.15}$$

в силу которого уравнение (8.5) переходит в уравнение (8.13). Подобно тому как решетка Хекла и вырожденная решетка являются расчетными высокочастотными моделями обычной решетки, решетка с шарнирами является ее низкочастотной моделью. Наилучшим образом эта модель характеризует решетку, составленную из высоких, но узких стержней, для которых неравенства (8.14) и (8.15) выполняются вплоть до весьма высоких частот. Здесь, однако, нужно сделать оговорку. Когда решетка с шарнирами рассматривается как модель обычной решетки, то следует принимать во внимание только три нормальные волны, постоянные распространения которых определяются из уравнения (8.13). Две крутильные волны встречают в узлах бесконечные сопротивления [в силу неравенств (8.14) и (8.15)] и не могут выйти за пределы одной ячейки периодичности.

Исследование уравнения (8.13) проводится с помощью линий уровня частоты так же, как это делалось раньше для струнной

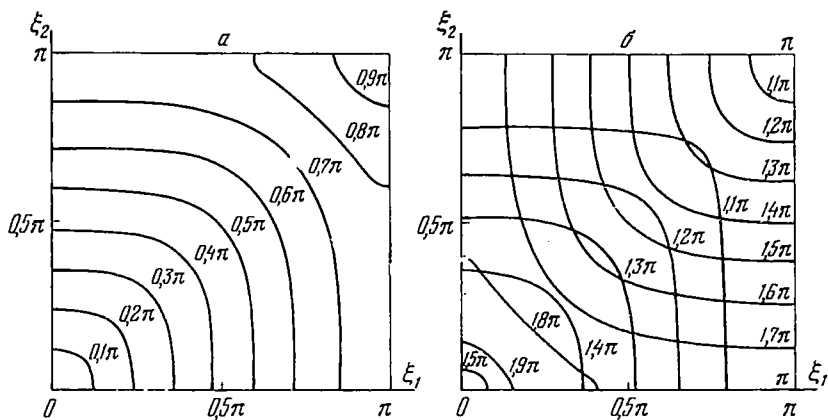


Рис. 23. Линии постоянного уровня дисперсионной поверхности $\sigma(\xi_1, \xi_2) = \text{const}$ решетки с шарнирным соединением стержней в узлах
 а — $\sigma = 0 \div \pi$; б — $\sigma = \pi \div 2\pi$

решетки. На рис. 23 эти линии построены для квадратной решетки из одинаковых стержней. По этим графикам на рис. 24 построены дисперсионные кривые для трех направлений распространения волн $\varphi = 0, \arctg 1/2, \pi/4$. На частотах, близких к нулю, дисперсионные кривые для всех значений угла φ вырождаются в прямые линии, исходящие из начала координат. Как показано далее, это следствие того, что дисперсия незатухающей решетчатой волны на низких частотах такая же, как и дисперсия нормальной волны анизотропной пластины. Как и у струнной решетки, ширина полос не пропускания у решетки с шарнирами наибольшая при углах распространения $\varphi = 0$ или $\pi/2$. При отклонении от этих направлений ширина уменьшается, а при $\varphi = \pi/4$ она равна нулю. Это, как мы уже знаем, явление совпадения. Характерной особенностью нормальных волн рассматриваемой

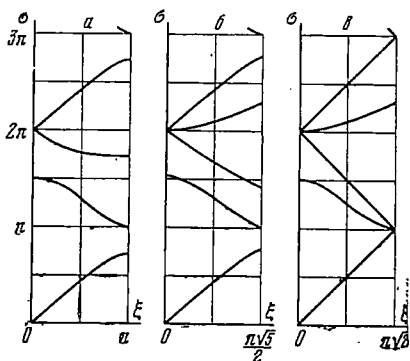


Рис. 24. Дисперсионные кривые нормальной волны в решетке с шарнирами

Волна распространяется под углом:
 а — $\varphi = 0$; б — $\varphi = \arctg 0,5$;
 в — $\varphi = \pi/4$

модели является то, что в некоторых диапазонах частот две из них имеют действительные постоянные μ и распространяются с разными фазовыми и групповыми скоростями. Что же касается вынужденных колебаний решетки с шарнирами, то ни ее функция Грина, ни податливость через известные функции не выражаются. Исследовать их можно либо асимптотическими методами, либо с помощью вычислительных машин.

Низкочастотные колебания

На самых низких частотах ($\sigma \ll 1$), как показывают вычисления, один корень уравнения (8.5) является комплексным и конечным по абсолютной величине. Нормальная волна, соответствующая этому корню, имеет вид $(-1)^n \exp(-An)$. При стремлении частоты к нулю величина A стремится к конечному пределу. Два других корня уравнения (8.5) малы по абсолютной величине (порядка k_m) и при $\sigma \rightarrow 0$ сами стремятся к нулю. Для этих «длинных» нормальных волн дисперсионное уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{B_1}{l_2} \mu_1^4 + \left(\frac{C_1}{l_2} + \frac{C_2}{l_1} \right) \mu_1^2 \mu_2^2 + \frac{B_2}{l_1} \mu_2^4 - \left(\frac{B_1}{l_2} \varepsilon_1^4 + \frac{B_2}{l_1} \varepsilon_2^4 \right) = 0. \quad (8.16)$$

Точно такую же дисперсию имеют нормальные волны анизотропной пластины, которые описываются дифференциальным уравнением

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $D_1 = B_1/l_2$, $D_2 = B_2/l_1$, $2D_{12} = C_1/l_2 + C_2/l_1$, $\rho_0 = (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)/l_1 l_2$.

Таким образом, две нормальные решетчатые волны имеют на низких частотах такую же дисперсию, как и нормальные волны анизотропной пластины. Сходство между колебаниями решетки и пластины известно давно [40] и, несмотря на известные дискуссии и возражения [64, 70], часто используется при различных расчетах. Но, как это следует из сказанного выше, уравнение (8.16) не учитывает третьей нормальной волны в решетке, и, значит, пользоваться этой аналогией следует с осторожностью, в особенности при вычислении характеристик ближнего поля решетки.

О числе нормальных волн в решетке

Рассмотрим вопрос о числе нормальных волн в двумерных решетках. Отмечалось, что число это различно для разных решеток. Так, в решетке Хекла существует одна нормальная волна, в вырожденной решетке — три и т. д.

В главе 6 для одномерных решеток мы вывели простое правило

определения числа нормальных волн по числу независимых механизмов передачи энергии от ячейки к ячейке.

Это правило распространяется и на двумерные решетки. Представим себе, например, два бесконечных набора цепочек из одинаковых четырехполюсников, параллельных осям x_1 и x_2 . Каждая такая цепочка является моделью струны, а в целом оба набора моделируют разьединенную струнную решетку. В такой структуре, очевидно, будут существовать две нормальные волны — одна в одном наборе, другая во втором наборе, аналогичные волнам вырожденной решетки. Если наложить на эту структуру жесткие связи, а именно соединить оба набора так, чтобы смещения в местах соединения были одинаковы, то два механизма передачи энергии сливаются в один, и в такой двумерной цепочке существует уже только одна нормальная волна. Такая цепочка будет моделью мембраны или струнной решетки в зависимости от способа наложения жестких связей.

Точно так же обстоит дело и в стержневой решетке. Однородный стержень, совершающий изгибные и крутильные колебания, может быть представлен цепочкой из 12-полюсников (для этого к цепочке из восьмиполусников, моделирующей изгибные колебания, нужно добавить цепочку из четырехполюсников, моделирующую крутильные колебания, и рассматривать эти две независимые цепочки как одну, составленную из 12-полюсников). В двух наборах таких цепочек, параллельных осям x_1 и x_2 , т. е. в разьединенной стержневой решетке, будет присутствовать шесть нормальных волн — по три в каждом наборе. Если стержни соединить в узлах шаровыми шарнирами, иными словами, наложить жесткие связи на линейные перемещения обоих наборов в местах их пересечения, то энергия от ячейки к ячейке будет передаваться пятью механизмами (одной парой «сила — линейная скорость», двумя парами «изгибающий момент — угловая изгибная скорость» и двумя парами «крутящий момент — угловая скорость кручения»). В решетке с шаровыми шарнирами, следовательно, существует пять нормальных волн.

При наложении других жестких связей число нормальных волн в решетке будет уменьшаться и дальше. Если в узлах соединить стержни с помощью цилиндрических шарниров, т. е. наложить в узлах жесткие связи двух видов — на перемещения и на угловые смещения в одном из направлений, то в такой решетке будут существовать четыре нормальные волны. При жестком соединении стержней в узлах число нормальных волн равно трем.

Это же следует, как показано выше, из дисперсионного уравнения (8.5). Далее с помощью специальных приспособлений можно добиться того, чтобы узлы решетки не поворачивались в одном из главных направлений. Тем самым ликвидируется еще один механизм передачи энергии и число волн уменьшается до двух.

Наконец, если запретить повороты узлов и в другом направлении, то энергия может передаваться только одним механизмом (парой «сила — линейная скорость»). Это решетка Хекла. В ней существует одна нормальная волна.

Глава 9

СТЕРЖНЕВЫЕ РЕШЕТКИ СПЕЦИАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ И РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ

В предыдущих главах при рассмотрении колебаний различных решеток каждый раз отмечалось наличие полос пропускания и непропускания. Полоса непропускания — это такая частотная область, где все нормальные волны имеют комплексную или мнимую постоянную распространения и поэтому затухают с расстоянием. Если в одну из точек решетки поместить источник колебаний, а приемник установить в другой точке на некотором удалении от источника, то зависимость отношения амплитуд колебаний этих двух точек от частоты будет характеризоваться чередующимися спадами и подъемами. При этом частоты, где отношение выход/вход ослабляется, лежат в полосах непропускания и чем больше затухание нормальных волн, тем больше будет и ослабление сигнала. Таким образом, относительно двух точек (вход и выход) бесконечная решетка может рассматриваться как полосовой механический фильтр. Очевидно, что такими же свойствами обладают и конечные решетки, так как и в них не могут существовать другие волны, кроме нормальных и их линейных комбинаций. Такие фильтры будем называть решетчатыми.

В настоящей главе рассматриваются два решетчатых фильтра, которые на практике можно использовать для виброизоляции, например, судовых механизмов. В лабораторных исследованиях, результаты которых приводятся ниже, один из этих фильтров был выполнен в виде модели фундамента под механизм.

Стержневая решетка с дополнительными массами в узлах

Часть такой решетки показана на рис. 25. Она состоит из обычной стержневой (прямоугольной или косоугольной) решетки, к узлам которой жестко присоединены одинаковые массы. Подсчет числа нормальных волн по способу, приведенному в главе 8,

Рис. 25. Стержневая решетка с дополнительными массами в узлах

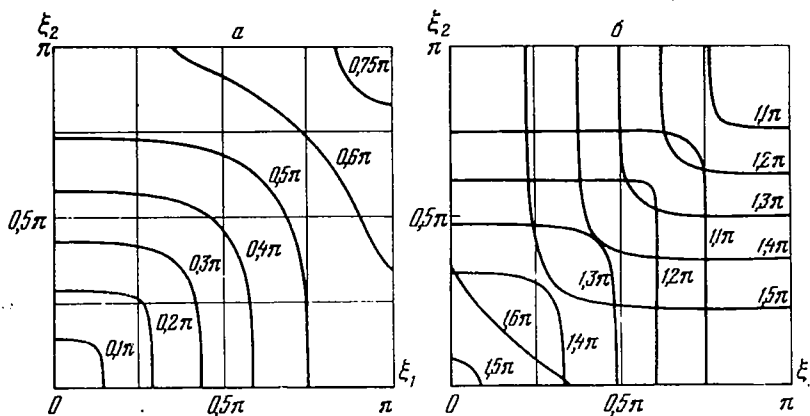
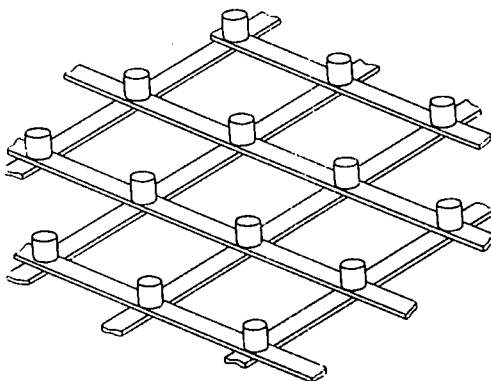


Рис. 26. Линии постоянного уровня дисперсионной поверхности $\sigma(\xi_1, \xi_2) = \text{const}$ решетки с массами

$a - \sigma = 0 \div \pi$; $b - \sigma = \pi \div 2\pi$

показывает, что в решетке, изображенной на рис. 25, оно равно семи. Дисперсионное уравнение, следовательно, имеет вид равного нулю полинома седьмой степени относительно $\cos \xi_1$ и $\cos \xi_2$. Найти корни уравнения, а тем более исследовать их — очень трудоемкая работа. Поэтому целесообразно заменить эту решетку более простой. Оказывается, для приближенных расчетов на не слишком высоких частотах ($\sigma < 4\pi$) можно пренебречь моментным взаимодействием стержней и нагрузки в узлах (см. главу 8). Сравнение расчетных и экспериментальных результатов при этом показывает вполне удовлетворительное их совпадение.

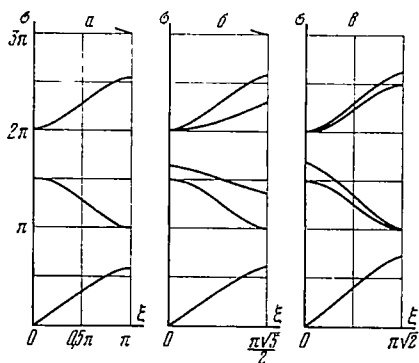


Рис. 27. Дисперсионные кривые нормальных волн в решетке с дополнительными массами, распространяющихся под углом

$a - \varphi = 0$; $б - \varphi = \text{arctg } 0,5$; $в - \varphi = \pi/4$

При сделанном допущении колебания решетки в своей плоскости и поперечные колебания оказываются независимыми. нас будут интересовать только поперечные колебания. Дисперсионное уравнение поперечных нормальных волн будет представлять собой равенство нулю суммы групповых жесткостей трех составных элементов (двух наборов стержней и массовой нагрузки):

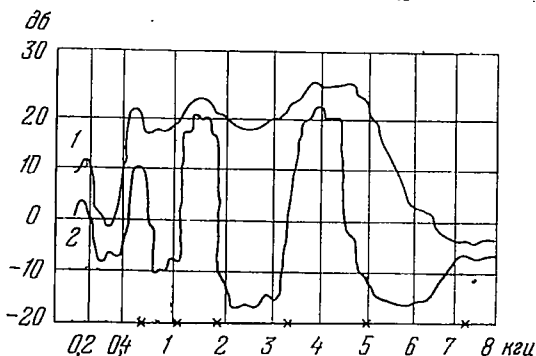
$$\sum_{i=1}^2 4B_i k_i^3 \left[\frac{\sin \sigma_i}{\cos \sigma_i - \cos \xi_i} - \frac{\text{sh } \sigma_i}{\text{ch } \sigma_i - \cos \xi_i} \right] + C_H = 0. \quad (9.1)$$

Это уравнение дает три корня для постоянной распространения $\mu = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2}$. В решетке, следовательно, существуют три поперечные нормальные волны. В отсутствие нагрузки ($C_H = 0$) они переходят в три волны решетки с шарнирным соединением в узлах (см. главу 8).

На рис. 26 изображены линии уровня $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ для квадратной решетки из одинаковых стержней $B_1 = B_2 = B$, полученные из уравнения (9.1) при $C_H/4Bk^3 = -0,6\sigma$, а на рис. 27 — дисперсионные кривые для трех углов распространения $\varphi = 0$, $\text{arctg } 0,5$ и $\pi/4$. Как видно из этих графиков, в отличие от решетки без нагрузочных масс (см. главу 8) в рассматриваемой здесь решетке полосы непропускания существуют независимо от направления распространения. С увеличением частоты ширина полос стремится к конечному пределу $\Delta\sigma = \pi/2$ для всех направлений распространения. Это свойство положено в основу работы фильтра, представляющего собой ограниченную решетку с массовой нагрузкой в узлах.

Проверка эффективности работы этого фильтра проводилась в лабораторных условиях на квадратной решетке из одинаковых стержней. Размер ячейки 15×15 см, стержни из стали имели толщину 0,4 см и ширину 2 см. К узлам решетки приваривались дополнительные массы по 150 г каждая. Такая решетка (8×7 ячеек) была приварена по всему периметру к боковым граням металлического ящика, сваренного из ребристых пластин.

Рис. 28. Средние уровни вибраций опорного ящика при установлении вибратора на решетку без масс (кривая 1) и на решетку с дополнительными массами (кривая 2)



Решетка возбуждалась в центре с помощью электродинамического вибратора, а отклики измерялись в 10 различных точках ящика. Измерения проводились на двух решетках: одна была без дополнительных масс, а другая — с массами.

На рис. 28 изображены средние по 10 точкам уровни вибрации ящика.

Как видно из рис. 28, решетка без масс не обладает ярко выраженными свойствами фильтрации и виброизоляция ее невелика. На кривой 2 для решетки с массами, наоборот, имеются три глубоких провала. Они соответствуют трем первым полосам непропускания. Уровни вибраций ящика в этих частотных областях на 30—40 $\deltaб$ ниже, чем при установке вибратора на решетку без масс. На рис. 28 крестиками на оси абсцисс отмечены границы полос непропускания и пропускания, рассчитанных по формуле (9.1). Несмотря на сильные допущения, сделанные при выводе дисперсионного уравнения (9.1), расчетные полосы удовлетворительно совпадают с экспериментальными.

Бесконечная слоистая решетка

Другой механический фильтр основан на колебательных свойствах решетки, которая схематически изображена на рис. 29. Она состоит из набора параллельных стержней, соединенных в шахматном порядке нагрузками $Z_{ш}$. В такой решетке существует 12 нормальных волн, из них 6 поперечных и 6 в плоскости решетки.

Мы ограничимся рассмотрением колебаний в плоскости решетки. Но даже в этом случае общее исследование дисперсии волн представляет значительные трудности. Поэтому будем рассматривать распространение волн только в направлении, перпендикулярном стержням. Задача от этого значительно упрощается. Действительно, тогда все нагрузки в каждом слое колеблются одинаково, вследствие чего они не могут поворачиваться и смещаются только в вертикальном направлении. Всю решетку можно разбить на вертикальные полосы, одна из которых показана на рис. 29

пунктиром, и рассматривать распространение в одной из них, так как в остальных будет происходить то же самое. Таким образом, при распространении волн в направлении оси y решетка, изображенная на рис. 29, эквивалентна одномерному стержню с периодической сосредоточенной нагрузкой, причем сопротивление нагрузки изгибающему моменту бесконечно (узлы не поворачиваются), а перерезывающей силе равно $C_H/2$. В такой решетке, как это следует из главы 6, существует лишь одна нормальная волна. Постоянные распространения остальных пяти нормальных волн обращаются в нуль. Дисперсионное уравнение этой единственной волны сразу получается из уравнения (6.2), в котором положено $C_m = \infty$ и $C_f = C_H/2$:

$$\cos \xi = \frac{\sin \sigma \operatorname{ch} \sigma + \cos \sigma \operatorname{sh} \sigma + (C_H/4Bk^3)(1 - \cos \sigma \operatorname{ch} \sigma)}{\sin \sigma + \operatorname{sh} \sigma}. \quad (9.2)$$

Отсюда можно получить полную информацию о распространении волн в бесконечной решетке, т. е. найти границы полос пропускания и непропускания, величину затухания в полосах непропускания и т. д. Некоторые из этих результатов могут быть

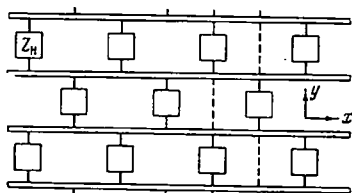


Рис. 29. Схема слоистой решетки: система параллельных равностоящих стержней соединена нагрузками Z_H , расположенными в шахматном порядке

применены и для конечной решетки. Так, границы полос непропускания останутся теми же. Однако затухание на нескольких ячейках, т. е. перепад уровней вибраций на концах решетки, лишь в грубом приближении можно считать произведением перепадов на отдельных ячейках. Степень этого приближения зависит от количества ячеек и от граничных условий. Ясно, что когда число ячеек велико, граничные условия мало влияют на перепад. Но когда их немного, граничные условия сказываются сильнее и замена конечной решетки отрезком бесконечной иногда приводит к неверным окончательным результатам. Поэтому ниже проведен расчет конечной решетки по-прежнему только для колебаний в плоскости решетки и в направлении вдоль оси y .

Конечная слоистая решетка

Расчетная модель представляет собой ограниченный стержень с периодической нагрузкой ($C_f = C_H/2$ и $C_m = \infty$) с некоторыми граничными условиями на концах. Представив каждую ячейку периодичности (звено) в виде отрезка стержня длиной l и с нагрузками $C_H/4$ на обоих его концах, мы получим конечную це-

почку из симметричных четырехполюсных звеньев. Нетрудно получить уравнение одного звена

$$\begin{aligned} f(nl) &= (C_1 + C_H/4) w(nl) - C_2 w(nl + l), \\ f[(n + 1)l] &= C_2 w(nl) - (C_1 + C_H/4) w[(n + 1)l], \end{aligned} \quad (9.3)$$

где n — целое число и

$$\begin{aligned} C_1 &= Bk^3 (\sin \sigma \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma \cos \sigma) / (1 - \cos \sigma \operatorname{ch} \sigma), \\ C_2 &= Bk^3 (\sin \sigma + \operatorname{sh} \sigma) / (1 - \cos \sigma \operatorname{ch} \sigma). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Если в уравнение (9.3) подставить $f[(n + 1)l] = f(nl) \exp(i\xi l)$ и $w[(n + 1)l] = w(nl) \exp(i\xi l)$, то получится дисперсионное уравнение (9.2).

Пусть цепочка состоит из N звеньев. Найдем уравнение ее колебаний, считая, что на начальное и на конечное звенья действуют силы $f(0)$ и $f(Nl)$. Ищем смещение в узлах в виде

$$w(nl) = A \sin \xi n + B \cos \xi n, \quad (9.5)$$

где ξ — решение уравнения (9.2); A и B — произвольные постоянные. На концах цепочки должны выполняться условия

$$\begin{aligned} f(0) &= (C_1 + C_H/4) w(0) - C_2 w(l), \quad f(Nl) = C_2 w[(N - 1)l] - \\ &\quad - (C_1 + C_H/4) w(Nl), \end{aligned}$$

которые находятся из уравнений (9.3). Подставляя сюда решение (9.5), найдем коэффициенты A , B . После этого, определяя из (9.5) $w(0)$ и $w(Nl)$, получим искомые уравнения для всей цепочки:

$$\begin{aligned} f(0) \sin N\xi &= w(0) [(C_1 + C_H/4) \sin N\xi - C_2 \sin(N - 1)\xi] - \\ &\quad - w(Nl) (C_2 \sin \xi), \\ f(Nl) \sin N\xi &= w(0) (C_2 \sin \xi) - w(Nl) [(C_1 + C_H/4) \sin N\xi - \\ &\quad - C_2 \sin(N - 1)\xi]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Из этих уравнений получаются все необходимые для расчета формулы. Например, для эксперимента, который описывается далее, необходимо было рассчитать перепад уровней $w(0)/w(Nl)$ такой цепочки, нагруженной на правом конце некоторой динамической жесткостью C_0 . Формула для перепада выводится из второго уравнения (9.6) после деления его на $w(Nl) C_2 \sin \xi$. Учитывая, что $f(Nl)/w(Nl) = C_0$ и $(C_1 + C_H/4)/C_2 = \cos \xi$ (см. равенство (9.4)), получаем

$$\frac{w(0)}{w(Nl)} = \left(\frac{C_0}{C_2} + \cos \xi \right) \frac{\sin N\xi}{\sin \xi} - \frac{\sin(N - 1)\xi}{\sin \xi}, \quad (9.7)$$

где четные функции $\sin N\xi/\sin \xi$ и $\sin(N - 1)\xi/\sin \xi$ всегда могут быть выражены через $\cos \xi$ (9.2).

Решетчатый фундамент

Перейдем теперь к рассмотрению результатов лабораторного исследования решетчатого фильтра, построенного на основе слоистой решетки [34]. В качестве нагрузки, соединяющей стержни, были выбраны массы. Фильтр выполнен в виде геометрической модели (1 : 4) фундамента под судовые механизмы и поэтому в дальнейшем будет называться решетчатым фундаментом (рис. 30). Модель состояла из пяти вертикальных слоистых решеток одинаковой конструкции, сваренных в местах соединения. Сверху приваривалась горизонтальная рама, на которую могли крепиться амортизаторы или механизм. Снизу модель решетчатого фундамента приваривалась к набору модели корпуса. Модель корпуса представляла собой прямоугольную стальную оболочку, подкрепленную ребрами жесткости. Возбуждение конструкции осуществлялось белым шумом с помощью вибраторов.

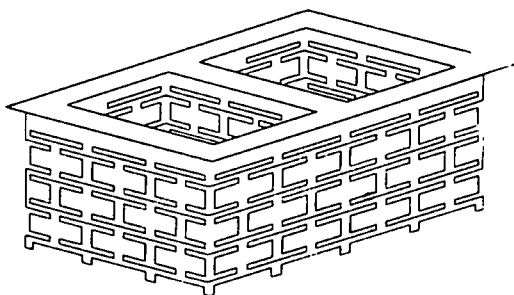


Рис. 30. Вариант конструкции решетчатого фундамента

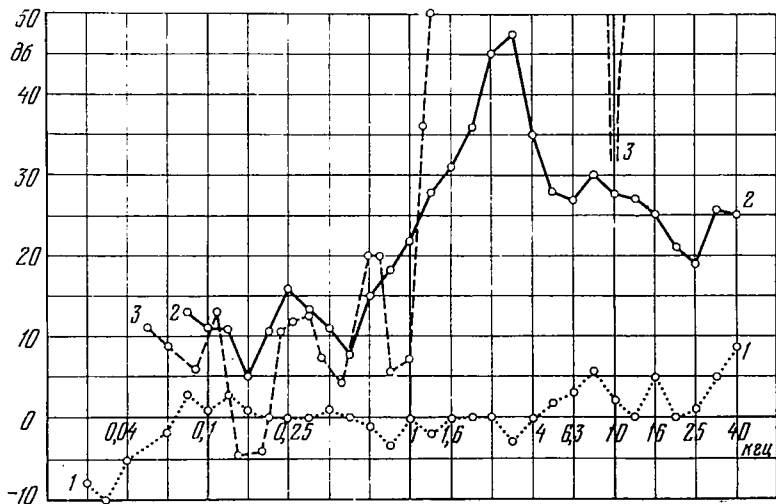


Рис. 31. Кривые виброизоляции

1 — обычного фундамента; 2 — решетчатого фундамента; 3 — решетчатого фундамента, рассчитанного по формуле (9.7)

Измерения проводились на решетчатом фундаменте (с 10 амортизаторами и без них) и на обычном фундаменте, по форме и габаритам похожем на решетчатый. В качестве показателя виброизоляции обоих фундаментов использовался перепад в децибелах между уровнями вибраций в 10 точках верхней полки фундамента и в лежащих под ним 10 точках набора корпуса.

Результаты измерений изображены на рис. 31—34. На рис. 31 показаны перепады уровней вибраций на фундаментах. Обычный фундамент практически не ослабляет вибрации своей верхней полки, в то время как решетчатый фундамент дает значительную виброизоляцию начиная с частоты порядка 1 кГц. При расчете перепада уровней на решетчатом фундаменте (кривая 3) в формуле (9.7) полагалось $N = 4$, а в качестве C_0 принималась входная жесткость модели набора корпуса, измеренная экспериментально [7]. Согласие экспериментальных и теоретических данных (кривые 2 и 3) вполне удовлетворительно на низких частотах (до 1 кГц), когда перепады уровней малы. В полосах непропускания (первые три расчетные полосы непропускания: $1,1 \div 10$, $11 \div 28$ и > 29 кГц) теоретические значения виброизоляции значительно превышают экспериментальные. Причина этого состоит в том, что в полосах непропускания вибрации с верхней полки решетчатого фундамента практически не передаются на корпус вертикальными колебаниями решетки. Основное значение в передаче колебательной энергии от источника на корпус в этих частотных диапазонах имеют воздушный шум и горизонтальные колебания решетки.

Измерения показали, что решетчатый фундамент обладает меньшим входным сопротивлением, чем обычный фундамент. Вследствие этого виброизоляция амортизаторов, установленных на решетчатом фундаменте, меньше виброизоляции тех же амортизаторов, установленных на обычном фундаменте. Из рис. 32 видно, что разница эта составляет в среднем 10 дБ. Однако виброизоляция системы амортизаторы — решетчатый фундамент оказалась выше виброизоляции системы амортизаторы — обычный фундамент. Из рис. 33 видно, что виброизоляция первой системы особенно велика в первой полосе непропускания решетчатого фундамента.

На рис. 34 представлена величина, называемая эффективностью решетчатого фундамента и демонстрирующая эффект замены обычного фундамента решетчатым. Эффективность решетчатого фундамента показывает, на сколько децибел уменьшились (положительная эффективность) или увеличились (отрицательная эффективность) уровни вибраций модели корпуса судна при перестановке источника вибраций с обычного фундамента на решетчатый. Вибрация обычного фундамента или системы амортизаторы — обычный фундамент, таким образом, играет роль эталона, с которым сравнивается виброизоляция решетчатого фундамента или системы амортизаторы — решетчатый фундамент.

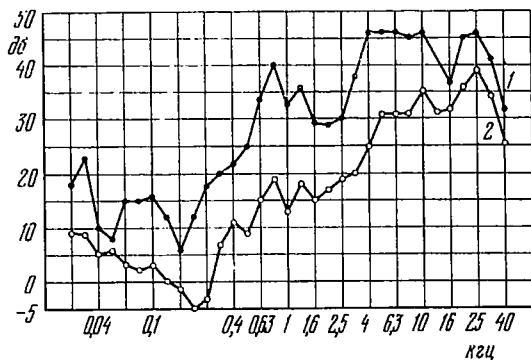


Рис. 32. Виброизоляция амортизаторов, установленных на обычный фундамент (кривая 1) и на решетчатый фундамент (кривая 2)

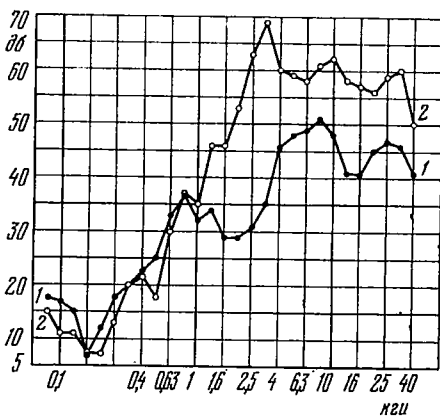


Рис. 33. Виброизоляция системы

- 1 — амортизаторы — обычный фундамент;
- 2 — амортизаторы — решетчатый фундамент

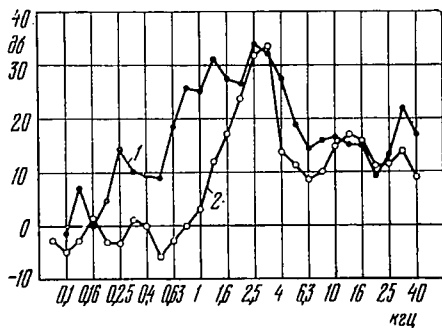


Рис. 34. Эффективность решетчатого фундамента (1) и системы амортизаторы — решетчатый фундамент (2)

Очевидно, что эффективность обычного фундамента равна нулю во всем диапазоне частот.

Эффективность решетчатого фундамента положительна не только в полосах непропускания решетки, но и на более низких частотах, так как жесткость решетчатого фундамента меньше жесткости обычного фундамента.

Эффективность системы амортизаторы — решетчатый фундамент на частотах ниже 1 кгц близка к нулю. Это следствие того, что жесткость решетчатого фундамента была на порядок больше жесткости амортизаторов и виброизоляция систем амортизаторы — решетчатый фундамент и амортизаторы — обычный фундамент определялась в этом диапазоне частот главным образом амортизаторами. На частотах выше 1 кгц , где существенными являются виброизолирующие свойства решетки, эффективность системы амортизаторы — решетчатый фундамент не хуже 10 дб , а в первой полосе непропускания превышает 30 дб .

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин.* Некоторые вопросы акустической динамики машин.— Proc. 3 World Congress of the theory of Machines and Mechanisms, v. A, Kupari, Yugoslavia, September, 1971.
2. *Ю. И. Бобровницкий, В. П. Маслов.* Распространение изгибных волн по стержню с периодической сосредоточенной нагрузкой.— Акустический журнал, 1966, т. 12, вып. 2.
3. *Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин, В. П. Маслов, А. В. Римский-Корсаков.* Распространение изгибных волн в стержневой решетке.— Сб. «Борьба с шумами и вибрациями методами строительной акустики» (труды совещания в г. Челябинске). Стройпздат, 1966.
4. *Ю. И. Бобровницкий.* Колебания бесконечной стержневой решетки.— Акустический журнал, 1968, т. 14, вып. 4.
5. *Ю. И. Бобровницкий.* Вынужденные колебания периодически неоднородного стержня.— Труды VI Всесоюз. акустической конф. в Москве. Изд. Акустического ин-та, 1968.
6. *Ю. И. Бобровницкий, К. И. Мальцев.* Вынужденные колебания стержня с периодической сосредоточенной нагрузкой.— Сб. «Борьба с шумом на судах». Л., изд-во «Судостроение», 1970.
7. *Ю. И. Бобровницкий, К. И. Мальцев, Л. К. Румянцев.* Вынужденные колебания плоского судового перекрытия с перекрестным набором.— Сб. «Борьба с шумом на судах». Л., изд-во «Судостроение», 1970.
8. *Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин, К. И. Мальцев.* Конструирование, расчет и испытание решетчатых фундаментов и опор.— Сб. «Динамика и акустика машин». Изд-во «Наука», 1971.
9. *Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин, В. П. Маслов.* Виброакустические характеристики элементов механических конструкций.— Сб. «Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами». Изд-во «Наука», 1971.
10. *Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин, В. П. Маслов.* Колебания бесконечной решетки из струн.— Сб. «Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами». Изд-во «Наука», 1971.
11. *Л. П. Борисов, Б. Д. Гартаковский.* Распространение волн изгиба по пластине с тонкими препятствиями.— Акустический журнал, 1965, т. 9, вып. 3.
12. *Л. М. Бреховский.* Распространение волн изгиба по пластинкам.— ЖТФ, 1944, т. 14, вып. 9.
13. *Л. М. Бреховский.* Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.
14. *Л. Бриллюэн, М. Пароди.* Распространение волн в периодических структурах. ИЛ, 1959.
15. *С. В. Будрин, А. С. Никифоров.* Прохождение волн через раз-

- личные соединения пластин.— Акустический журнал, 1963, т. 9, вып. 4.
16. *И. И. Клячкин*. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л., изд-во «Судостроение», 1971.
 17. *И. И. Клячкин*. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинках при помощи резонансных колебательных систем.— Акустический журнал, 1960, т. 6, вып. 2.
 18. *Ю. К. Коленков*. О нормальных волнах при изгибных колебаниях пластин.— Акустический журнал, 1960, т. 6, вып. 1.
 19. *Ю. К. Коленков*. Об изгибной волне «рэлеевского» типа.— Акустический журнал, 1960, т. 6, вып. 1.
 20. *П. Е. Краснушкин*. Нормальные волны в цепочечных многополюсных фильтрах.— ЖТФ, 1947, т. 17, вып. 6.
 21. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Теория упругости. Изд-во «Наука», 1965.
 22. *В. Т. Ляпунов*. Прохождение изгибных волн через короткий промежуточный стержень.— Акустический журнал, 1965, т. 11, вып. 2.
 23. *В. Т. Ляпунов*. Виброизоляция шарнирных соединений.— Акустический журнал, 1967, т. 13, вып. 2.
 24. *В. Т. Ляпунов*. Изоляция изгибных волн в пластинках произвольным препятствием.— Акустический журнал, 1968, т. 14, вып. 4.
 25. *А. Ляв*. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1934.
 26. *В. П. Маслов, Б. Д. Тартаковский*. Переход изгибных волн через промежуточный стержень.— Акустический журнал, 1961, т. 7, вып. 1.
 27. *В. П. Маслов, Б. Д. Тартаковский*. О переходе изгибных волн через промежуточный стержень с потерями.— Акустический журнал, 1961, т. 7, вып. 2.
 28. *В. П. Маслов, Б. Д. Тартаковский*. О распространении изгибных колебаний в некоторых неоднородных стержнях.— Акустический журнал, 1962, т. 8, вып. 2.
 29. *В. П. Маслов*. Косое падение изгибной волны на узкое препятствие.— Акустический журнал, 1967, т. 13, вып. 3.
 30. *В. П. Маслов*. Отражение изгибной волны от углового соединения пластин.— Акустический журнал, 1968, т. 14, вып. 4.
 31. *В. П. Маслов, А. В. Римский-Корсаков*. Плоские волны в пластине с параллельными ребрами жесткости.— Сб. «Вибрации и шум». Изд-во «Наука», 1969.
 32. Физическая акустика. Под ред. У. Мэсона. Т. I, ч. А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Изд-во «Мир», 1966.
 33. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин*. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., изд-во «Судостроение», 1969.
 34. *А. В. Римский-Корсаков, К. И. Мальцев, В. П. Маслов, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин*. Фундамент под оборудование. Авт. свид. № 317755.— Бюлл. изобр., 1971, № 31.
 35. *С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский*. Об импедансах при симметричных и асимметричных колебаниях слоистых пластин с потерями.— Акустический журнал, 1961, т. 7, вып. 4.
 36. *С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский*. Об одном случае полной звукоизоляции при прохождении звука через слоистосимметричную перегородку — Акустический журнал, 1961, т. 7, вып. 4.
 37. *С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский*. О колебаниях тонких пластин.— Акустический журнал, 1963, т. 9, вып. 1.
 38. *Е. Скучик*. Простые и сложные колебательные системы. Изд-во «Мир», 1971.
 39. *В. В. Смолянинов*. К вопросу об электрических свойствах синтицев.— Сб. «Модели структурно-функциональной организации биологических систем». Изд-во «Наука», 1966.
 40. *С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер*. Пластинки и оболочки. Изд-во «Наука», 1966.
 41. *В. В. Тютюкин*. Отражение и преломление изгибных волн на границе раздела двух пластин.— Акустический журнал, 1962, т. 8, вып. 2.
 42. *Ф. И. Федоров*. Теория упругих волн в кристаллах. Изд-во «Наука», 1965.
 43. *R. S. Ayre, L. S. Jacobsen*,

- Natural frequencies of continuous beams of uniform span length.— *J. of Appl. Mech.*, 1950, v. 17, № 4.
44. *L. Cremer*. Calculations of sound propagations in structures.— *Acustica*, 1953, v. 3, № 5.
 45. *L. Cremer, H. O. Leilich*. Zür theorie der Biegekettenleiter.— *Arch. Elec. Übertrag*, 1953, v. 7, № 6.
 46. *L. Cremer, M. Heckl*. Körper-schall. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
 47. *M. Heckl*. Wave propagation on beam—plate systems.— *JASA*, 1961, v. 33, № 5.
 48. *M. Heckl*. Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures.— *JASA*, 1964, v. 36, № 7.
 49. *Y. Jullien*. Vibrations de poutres chargees d'une facon discontinue.— *Acustica*, 1958, v. 8, № 4.
 50. *G. Kurtze, K. Tamm, S. Vogel*. Modellversuche zur Biegewellen—Dämmung an Acken.— *Acustica*, 1955, v. 5, № 3.
 51. *Y. K. Lin*. Free vibrations of continuous skin—stringer panels under random loading.— *J. Aerospace Sci.*, 1962, v. 29, № 1.
 52. *Y. K. Lin*. Stresses in continuous skin stiffener panels.— *J. Appl. Mech.*, 1960, v. 27, № 4.
 53. *Y. K. Lin, I. D. Brown, P. C. Deutsche*. Free vibrations of a finite row of continuous skin—stringer panels.— *J. Sound and vibr.*, 1964, v. 1, № 1.
 54. *Y. K. Lin, T. J. Mc Daniel*. Dynamics of beam—type periodic structures.— *ASME Vibr. Conference*, Philadelphia, 1969, Paper 69—Vibr.—17.
 55. *Y. K. Lin, T. J. McDaniel*. Dynamics of beam—type periodic structures.— *J. of Engin. for Industry*. Trans of ASME, Series B91, 1969, № 4.
 56. *D. J. Mead*. The damping of stiffened plate structures. *Acoustical Fatigue in Aerospace structures*, Chapter 26. Syracuse University Press, Syracuse, New York, 1965.
 57. *D. J. Mead*. Free wave propagation in periodically—supported infinite beams.— *J. Sound Vibr.*, 1970, v. 11, № 2.
 58. *C. A. Mercer*. Response of a multi—supported beam to a random pressure field.— *J. Sound Vibr.*, 1965, v. 2, № 3.
 59. *C. A. Mercer, C. A. Seavey*. Prediction of natural frequencies and normal modes of skin—stringer panel rows.— *J. Sound Vibr.*, 1967, v. 6, № 1.
 60. *J. W. Miles*. Vibrations of beams on many supports.— *Pros. Am. Soc. civil eng.*, 1956, v. 82, № 1.
 61. *P. M. Morse, K. U. Ingard*. *Theoretical acoustics*. McGraw Hill Co, N. Y., 1968.
 62. *Mugiono*. Messungen der Reflexion von Biegewellen an Querschnittschprüngen.— *Acustica*, 1953, v. 3, p. 105.
 63. *H. L. Müller*. Biegewellen—Dämmung an symmetrischen und exzentrischen Sperrmassen.— *Frequenz*, 1957, v. 11, № 10. *Frequenz*, 1957, v. 11, № 11.
 64. *J. D. Renton*. On the gridwork analogy for plates.— *J. Mech. Solids*, 1965, v. 13, № 6.
 65. *G. Sen Gupta*. Natural flexural waves and normal modes of periodically—supported beams and plates.— *J. Sound Vibr.*, 1970, v. 13, № 1.
 66. *G. Sen Gupta, D. J. Mead*. Wave group theory applied to the analysis of forced vibration of rib. skin structures. *Proc. Symp. struct. Dynamics*. Loughborough, 1970.
 67. *E. E. Ungar*. Transmission of plate flexural waves through reinforcing beams.— *JASA*, 1961, v. 33, № 5.
 68. *E. E. Ungar*. Steady-state responses of one—dimensional periodic flexural systems.— *JASA*, 1966, v. 39, № 5, part 1.
 69. *M. T. Vogel*. Sur l'application de la theorie des equation differentielles a coefficients periodiques aux problemes d'appuis elastiques.— *Compt. Rend.*, 1949, v. 228, № 2.
 70. *A. L. Yettram, H. M. Husain*. The representation of a plate in flexure by a grid of orthogonally connected beams.— *Intern. J. Mech. Sci.*, 1965, v. 7, № 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Раздел I	
Линейные препятствия на пластинах	
Глава 1. Линейные динамические жесткости	7
Глава 2. Виброакустические характеристики элементов конструкций	12
Бесконечная полоса	13
Полубезграничная пластина	17
Безграничная пластина	18
Несимметричное ребро жесткости	19
Глава 3. Линейные препятствия на безграничной пластине	20
Низкое ребро жесткости	21
Линейное несимметричное препятствие	24
Высокое ребро жесткости	26
Линейный звуковой мостик	28
Глава 4. Угловое соединение пластин	34
Жесткое соединение пластин	35
Шарнирное соединение пластин	40
Раздел II	
Решетчатые структуры	
Глава 5. Групповые динамические жесткости	42
Дисперсионное уравнение	44
Формулы для функций Грина	46
Глава 6. Одномерная стержневая решетка	54
Дисперсионное уравнение	55
Графическое исследование одного частного случая	56
Формулы для вынужденных колебаний	60
Входная податливость стержня с массами	62
О числе нормальных волн в одномерных решетках	65

Глава 7. Двумерная решетка из струн	67
Дисперсионное уравнение	67
Входная податливость	70
Асимптотика функции Грина	71
Глава 8. Прямоугольные стержневые решетки	74
Вывод общих формул	75
Вырожденная решетка	77
Решетка Хекла	77
Высокочастотные колебания решетки	81
Решетка с шарнирным соединением стержней в узлах . .	84
Низкочастотные колебания	86
О числе нормальных волн в решетке	86
Глава 9. Стержневые решетки специальной конструкции и решетчатые фильтры	88
Стержневая решетка с дополнительными массами в узлах	88
Бесконечная слоистая решетка	91
Конечная слоистая решетка	92
Решетчатый фундамент	94
Литература	98

**Распространение волн в конструкциях
из тонких стержней и пластин**

*Утверждено к печати
Государственным научно-исследовательским
институтом машиноведения*

Редактор издательства *М. Г. Макаренко*
Художник *В. Соловьев*
Художественный редактор *А. Жданов*
Технические редакторы *Т. С. Жарикова, В. В. Волкова*

Сдано в набор 4/III 1974 г. Подписано к печати 27/V 1974 г.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 6,5
Уч.-изд. л. 5,7 Тираж 1600. Тип. зак. 324. Т-06579,
Цена 57 коп.

Издательство «Наука», 103717 ГСП,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

57 КОП.

9350

44

30825